La géométrie algébrique

Théorème de Riemann-Roch

Yassine Ait Mohamed

Département de Mathématiques
Faculté des sciences Dhar El Mahraz
Université Sidi Mohammed Ben Abdellah

December 17, 2021

Plan

Plan

1. Aperçu historique
2. Rappels et Notations (pour tout l'exposé)
3. Diviseurs
4. Espaces de Riemann-Roch
5. Théorème de Riemann et Genre
6. Le Théorème de Riemann-Roch
7. Applications de théorème de Riemann-Roch

Aperçu historique

- Au milieu des années 1800 Bernard Riemann (1826-1866) s'est intéressé au problème suivant: Etant donné un diviseur D on désire trouver tous les diviseurs positifs qui lui sont équivalents sur une surface de Riemann compacte X.

Aperçu historique

- Au milieu des années 1800 Bernard Riemann (1826-1866) s'est intéressé au problème suivant: Etant donné un diviseur D on désire trouver tous les diviseurs positifs qui lui sont équivalents sur une surface de Riemann compacte X.
- Pour ce faire, il essaya d'étudier l'espace vectoriel complexe $L(D)$ et calculer sa dimension.

Aperçu historique

- Au milieu des années 1800 Bernard Riemann (1826-1866) s'est intéressé au problème suivant: Etant donné un diviseur D on désire trouver tous les diviseurs positifs qui lui sont équivalents sur une surface de Riemann compacte X.
- Pour ce faire, il essaya d'étudier l'espace vectoriel complexe $L(D)$ et calculer sa dimension.
- $L(D)$ l'espace $\{f$ méromorphe sur X vérifiant $(f) + D \geq 0\}$.

Aperçu historique

- Au milieu des années 1800 Bernard Riemann (1826-1866) s'est intéressé au problème suivant: Etant donné un diviseur D on désire trouver tous les diviseurs positifs qui lui sont équivalents sur une surface de Riemann compacte X.
- Pour ce faire, il essaya d'étudier l'espace vectoriel complexe $L(D)$ et calculer sa dimension.
- $L(D)$ l'espace $\{f$ méromorphe sur X vérifiant $(f) + D \geq 0\}$.
- C'est ainsi que l'égalité de Riemann énoncée comme suit :

$$dim(L(D)) \geq \deg(D) + 1 - g$$

Ici g désigne le genre de la surface.

- Des années plus tard Gustave Roch (1839-1866) compléta le travail de son maître. En comparant les quantités $dim(L(D))$ et $\deg(D)+1-g$ il parvient à montrer que:

$$dim(L(D)) = dim(L(C-D)) + \deg(D) + 1 - g$$

Où C désigne un certain diviseur dit canonique.

Aperçu historique

- Des années plus tard Gustave Roch (1839-1866) compléta le travail de son maître. En comparant les quantités $dim(L(D))$ et $\deg(D) + 1 - g$ il parvient à montrer que:

$$dim(L(D)) = dim(L(C - D)) + \deg(D) + 1 - g$$

  Où C désigne un certain diviseur dit canonique.
- En 1951 Henri Cartan apporte à la communauté mathématique la notion de faisceaux. Il démontre également que la cohomologie des faisceaux peut exprimer élégamment certains résultats tout en simplifiant les calculs. La conception faisceautique fut aussitôt appliquée au théorème en question.

- En effet, en considérant le faisceau des fonctions méromorphes sur la surface X et en appliquant les nouvelles techniques de la cohomologie des faisceaux l'équation plus haut devient:
  $dimH^0(X, O_D) - dimH^1(X, O_D) = \deg(D) + 1 - g.$

- En effet, en considérant le faisceau des fonctions méromorphes sur la surface X et en appliquant les nouvelles techniques de la cohomologie des faisceaux l'équation plus haut devient:
$dimH^0(X, O_D) - dimH^1(X, O_D) = \deg(D) + 1 - g$.
- La question qui se pose maintenant est la suivante: Etant donnée une variété algébrique et D un diviseur, que devient l'égalité précédente? Qu'en deviennent les ingrédients? Ont-ils toujours un sens?

- En effet, en considérant le faisceau des fonctions méromorphes sur la surface X et en appliquant les nouvelles techniques de la cohomologie des faisceaux l'équation plus haut devient:
$dimH^0(X, O_D) - dimH^1(X, O_D) = \deg(D) + 1 - g.$
- La question qui se pose maintenant est la suivante: Etant donnée une variété algébrique et D un diviseur, que devient l'égalité précédente? Qu'en deviennent les ingrédients? Ont-ils toujours un sens?
- Ces questions nous mènent à la généralisation du théorème de Riemann-Roch. Cela a été fait en deux étapes:

- En effet, en considérant le faisceau des fonctions méromorphes sur la surface X et en appliquant les nouvelles techniques de la cohomologie des faisceaux l'équation plus haut devient:
$dimH^0(X, O_D) - dimH^1(X, O_D) = \deg(D) + 1 - g$.
- La question qui se pose maintenant est la suivante: Etant donnée une variété algébrique et D un diviseur, que devient l'égalité précédente? Qu'en deviennent les ingrédients? Ont-ils toujours un sens?
- Ces questions nous mènent à la généralisation du théorème de Riemann-Roch. Cela a été fait en deux étapes:
- D'abord Hirzebruch donne une généralisation pour une variété projective lisse.

- En effet, en considérant le faisceau des fonctions méromorphes sur la surface X et en appliquant les nouvelles techniques de la cohomologie des faisceaux l'équation plus haut devient: $dimH^0(X, O_D) - dimH^1(X, O_D) = \deg(D) + 1 - g$.
- La question qui se pose maintenant est la suivante: Etant donnée une variété algébrique et D un diviseur, que devient l'égalité précédente? Qu'en deviennent les ingrédients? Ont-ils toujours un sens?
- Ces questions nous mènent à la généralisation du théorème de Riemann-Roch. Cela a été fait en deux étapes:
- D'abord Hirzebruch donne une généralisation pour une variété projective lisse.
- Pour Grothendieck on ne doit pas seulement se contenter d'étudier les variétés mais aussi les morphismes les reliant. Partant de ce principe et en introduisant les groupes de K-théorie Grothendiech généralise le théorème de Riemann-Roch à aux variétés quasi-projectives.

Plan

Soit k un corps

1. Un corps de fonctions en une seule variable sur k est une extension F de k tel qu'il existe $x \in F$, x est transcendant sur k. Dans ce k est appelé un champ constant (constant field) de F.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

Soit k un corps

1. Un corps de fonctions en une seule variable sur k est une extension F de k tel qu'il existe $x \in F$, x est transcendant sur k. Dans ce k est appelé un champ constant (constant field) de F.
2. $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k dans F. L'orsque $\overline{k} = k$, k est appelé un champ constant complet (full constant field) de F .

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

Soit k un corps

1. Un corps de fonctions en une seule variable sur k est une extension F de k tel qu'il existe $x \in F$, x est transcendant sur k. Dans ce k est appelé un champ constant (constant field) de F.
2. $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k dans F. L'orsque $\overline{k} = k$, k est appelé un champ constant complet (full constant field) de F .
3. F/k est dit un corps de fonctions algébrique en une seule varaible s'il existe $x \in F$ transcendant sur k et $F/k(x)$ est une extension finie.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

Soit k un corps

1. Un corps de fonctions en une seule variable sur k est une extension F de k tel qu'il existe $x \in F$, x est transcendant sur k. Dans ce k est appelé un champ constant (constant field) de F.
2. $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k dans F. L'orsque $\overline{k} = k$, k est appelé un champ constant complet (full constant field) de F .
3. F/k est dit un corps de fonctions algébrique en une seule varaible s'il existe $x \in F$ transcendant sur k et $F/k(x)$ est une extension finie.
4. Une valuation sur F/k est une valution $v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur F telle que $v_{|_{k^*}} \equiv 0$.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

Soit k un corps

1. Un corps de fonctions en une seule variable sur k est une extension F de k tel qu'il existe $x \in F$, x est transcendant sur k. Dans ce k est appelé un champ constant (constant field) de F.
2. $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k dans F. L'orsque $\overline{k} = k$, k est appelé un champ constant complet (full constant field) de F .
3. F/k est dit un corps de fonctions algébrique en une seule varaible s'il existe $x \in F$ transcendant sur k et $F/k(x)$ est une extension finie.
4. Une valuation sur F/k est une valution $v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur F telle que $v_{|_{k^*}} \equiv 0$.
5. Si $v(F^*)$ est discret, alors v est appelé valuation discrète. De plus si $v(F^*) = \mathbb{Z}$, alors v est appelée valuation normalisée

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

Soit k un corps

1. Un corps de fonctions en une seule variable sur k est une extension F de k tel qu'il existe $x \in F$, x est transcendant sur k. Dans ce k est appelé un champ constant (constant field) de F.
2. $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k dans F. L'orsque $\overline{k} = k$, k est appelé un champ constant complet (full constant field) de F .
3. F/k est dit un corps de fonctions algébrique en une seule varaible s'il existe $x \in F$ transcendant sur k et $F/k(x)$ est une extension finie.
4. Une valuation sur F/k est une valution $v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur F telle que $v_{|_{k^*}} \equiv 0$.
5. Si $v(F^*)$ est discret, alors v est appelé valuation discrète. De plus si $v(F^*) = \mathbb{Z}$, alors v est appelée valuation normalisée
6. $v \sim v^{'}$ ssi $c > 0$: $v(x) = cv^{'}(x)$, $\forall$x$\in$ F^*

1. Une classe d'équivalence d'une valuation discerte s'appelle une place de F/k.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

1. Une classe d'équivalence d'une valuation discerte s'appelle une place de F/k.
2. Pour une place P de F/k. On définit
   - $\mathcal{O}_P := \{x \in F/v_p(x) \geq 0\}$. $\mathcal{O}_P$ est appelé anneau de valuation discret associé à P. $(k \subseteq \mathcal{O}_P \subseteq F)$.
   - $M_P := \{z \in F/v_P(x) \geq 1\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_P$.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

1. Une classe d'équivalence d'une valuation discerte s'appelle une place de F/k.
2. Pour une place P de F/k. On définit
   - $\mathcal{O}_P := \{x \in F/v_p(x) \geq 0\}$. $\mathcal{O}_P$ est appelé anneau de valuation discret associé à P. $(k \subseteq \mathcal{O}_P \subseteq F)$.
   - $M_P := \{z \in F/v_P(x) \geq 1\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_P$.
   - $F_P := \mathcal{O}_P/M_P$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_P$.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

1. Une classe d'équivalence d'une valuation discerte s'appelle une place de F/k.
2. Pour une place P de F/k. On définit
   - $\mathcal{O}_P := \{x \in F/v_p(x) \geq 0\}$. $\mathcal{O}_P$ est appelé anneau de valuation discret associé à P. $(k \subseteq \mathcal{O}_P \subseteq F)$.
   - $M_P := \{z \in F/v_P(x) \geq 1\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_P$.
   - $F_P := \mathcal{O}_P/M_P$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_P$.
   - le degré de P est $[F_P, k]$. Notons que le degré d'une place est fini. L'orsque le degré d'une place P égale 1 est appelée une place rationnelle.

Rappels et notations (pour tout l'exposé)

1. Une classe d'équivalence d'une valuation discerte s'appelle une place de F/k.
2. Pour une place P de F/k. On définit
   - $\mathcal{O}_P := \{x \in F/v_p(x) \geq 0\}$. $\mathcal{O}_P$ est appelé anneau de valuation discret associé à P. $(k \subseteq \mathcal{O}_P \subseteq F)$.
   - $M_P := \{z \in F/v_P(x) \geq 1\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_P$.
   - $F_P := \mathcal{O}_P/M_P$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_P$.
   - le degré de P est $[F_P, k]$. Notons que le degré d'une place est fini. L'orsque le degré d'une place P égale 1 est appelée une place rationnelle.
   - L'application $\mathcal{O}_P \longrightarrow F_P$ est appelée l'application résiduelle.
3. L'ensemble des places de F sera noté par $\mathbf{P}_F$.

Plan

Diviseurs

Dans toute la suite F/k désigne un corps de fonctions algébrique en une seule variable et $k = \overline{k}$ ($\overline{k}$ la clôture algébrique de k) dans F .

Diviseurs

Définition

Le groupe de diviseurs de F/k noté par $Div(F)$ est un groupe abelien libre engendré par les places de F. En d'autres termes, un diviseur D est une somme formelle $\sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P$ où $n_P \in \mathbb{Z}$, $n_P = 0$ sauf un nombre fini de $P \in \mathbf{P}_F$.

Diviseurs

Remarque

1. *Si* $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P$ *et* $G = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} m_P P$ *sont de deux diviseurs. Alors* $D + G := \sum_{P \in \mathbf{P}_F} (n_P + m_P) P$.

Diviseurs

Remarque

1. *Si* $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P$ *et* $G = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} m_P P$ *sont de deux diviseurs.* *Alors* $D + G := \sum_{P \in \mathbf{P}_F} (n_P + m_P) P$.
2. $0 = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} 0P$ *appelé le diviseur nul.*

Remarque

1. *Si* $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P$ *et* $G = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} m_P P$ *sont de deux diviseurs. Alors* $D + G := \sum_{P \in \mathbf{P}_F} (n_P + m_P) P$.
2. $0 = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} 0P$ *appelé le diviseur nul.*
3. *Si* $D = P$, *avec* $P \in \mathbf{P}_F$. D *est appelé un diviseur premier.*

Diviseurs

Remarque

1. *Si* $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P$ *et* $G = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} m_P P$ *sont de deux diviseurs. Alors* $D + G := \sum_{P \in \mathbf{P}_F} (n_P + m_P) P$.
2. $0 = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} 0P$ *appelé le diviseur nul.*
3. *Si* $D = P$, *avec* $P \in \mathbf{P}_F$. *D est appelé un diviseur premier.*
4. *Si* D *et* G *de deux diviseurs de* F *avec* $D - G \geq 0$, *on écrit* $D \geq G$.

Diviseurs

Remarque

1. *Si* $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P$ *et* $G = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} m_P P$ *sont de deux diviseurs. Alors* $D + G := \sum_{P \in \mathbf{P}_F} (n_P + m_P) P$.
2. $0 = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} 0P$ *appelé le diviseur nul.*
3. *Si* $D = P$, *avec* $P \in \mathbf{P}_F$. D *est appelé un diviseur* ***premier***.
4. *Si* D *et* G *de deux diviseurs de* F *avec* $D - G \geq 0$, *on écrit* $D \geq G$.
5. *Un diviseur est dit* ***effectif*** *si tous les* n_P *non nuls sont positifs.*

Diviseurs

Remarque

1. *Si* $D = \sum_{P\in \mathbf{P}_F} n_P P$ *et* $G = \sum_{P\in \mathbf{P}_F} m_P P$ *sont de deux diviseurs. Alors* $D + G := \sum_{P\in \mathbf{P}_F} (n_P + m_P)P$.
2. $0 = \sum_{P\in \mathbf{P}_F} 0P$ *appelé le diviseur nul.*
3. *Si* $D = P$, *avec* $P \in \mathbf{P}_F$. D *est appelé un diviseur premier.*
4. *Si* D *et* G *de deux diviseurs de* F *avec* $D - G \geq 0$, *on écrit* $D \geq G$.
5. *Un diviseur est dit effectif si tous les* n_P *non nuls sont positifs.*
6. *Si* $Q \in \mathbf{P}_F$, *on définit* $V_Q(D) := n_Q$ *et* $V_Q = 0 \iff Q \notin supp(D)$.

Diviseurs

Définition

Soit $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P \in Div(F)$ *un diviseur.*

1. *On appelle support de* D *l'ensemble* $supp(D) := \{P \in \mathbf{P}_F : v_P(D) \neq 0\}$.

Diviseurs

Définition

Soit $D = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} n_P P \in Div(F)$ *un diviseur.*

1. *On appelle support de* D *l'ensemble* $supp(D) := \{P \in \mathbf{P}_F : v_P(D) \neq 0\}$.
2. *On appelle le degré d'un diviseur* D *et on note par* $deg(D)$ *définie par*

$$deg(D) := \sum_{p \in \mathbf{P}_F} n_P deg(P)$$

Diviseurs

Proposition

1. $deg : Div(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est un homomorphisime de groupes.*

Diviseurs

Proposition

1. *deg* : $Div(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est un homomorphisime de groupes.*
2. *Le noyau de ce homomorphisime est un sous groupe de* $Div(F)$ *et le Noté par* $Div^0(F)$.

Diviseurs

Proposition

Pour tout $x \in F \setminus k$, on a :

$$\sum_{P \in \mathbf{P}_F, v_P(x) > 0} v_P(x) deg(P) \leq [F : k(x)]$$

(Théoreme d'approximation)

Lemme

Soit $P_1, \ldots . P_r$ des places distincts 2 à 2 de F/k. Alors pour tout $w_1 \ldots . w_r \in F$ et $m_1 \ldots m_r \in \mathbb{Z}$, il existe $z \in F$ tel que

$$v_{p_i}(z - w_i) = m_i, \forall i \in \{1, \ldots r\}$$

Diviseurs

Soient P une place de F et $x \in F^*$ on dit que :

1. P est un zéro de $x \iff v_P(x) > 0$.

Corollaire

Pour tout $x \in F^*$, x possède un nombre fini des zéros et un nombre fini des pôles.

Diviseurs

Soient P une place de F et $x \in F^*$ on dit que :

1. P est un zéro de $x \iff v_P(x) > 0$.
2. P est un pôle de $x \iff v_P(x) < 0$.

Corollaire

Pour tout $x \in F^*$, x possède un nombre fini des zéros et un nombre fini des pôles.

Diviseurs

Soit $\mathcal{N}(x)$ l'ensemble des zéros de x et $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des pôles de x.

1. Notons que $\mathcal{N}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ sont des ensembles finies .

Diviseurs

Soit $\mathcal{N}(x)$ l'ensemble des zéros de x et $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des pôles de x.

1. Notons que $\mathcal{N}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ sont des ensembles finies .
2. On définit le zéro diviseur $(x)_0$ par

$$(x)_0 := \sum_{P \in \mathcal{N}(x)} v_p(x) P$$

et le pôle diviseur de x par

$$(x)_\infty := \sum_{P \in \mathcal{P}(x)} (-v_P(x)) P$$

.

Diviseurs

Soit $\mathcal{N}(x)$ l'ensemble des zéros de x et $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des pôles de x.

1. Notons que $\mathcal{N}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ sont des ensembles finies .
2. On définit le zéro diviseur $(x)_0$ par

$$(x)_0 := \sum_{P \in \mathcal{N}(x)} v_p(x) P$$

et le pôle diviseur de x par

$$(x)_\infty := \sum_{P \in \mathcal{P}(x)} (-v_P(x)) P$$

.

3. Notons que $(x)_0$ et $(x)_\infty$ sont des diviseurs effectifs.

Diviseurs

Finalement on définit le diviseur principal $div(x)$ de x par

$$div(x) = (x)_0 - (x)_\infty = \sum_{P \in \mathbf{P}_F} v_P(x) P$$

.

1. L'application div : $F^* \longrightarrow Div(F)$ est un homomrphisime de groupes .

Diviseurs

Proposition

Pour tout $x \in F \setminus k$, x admet au moins un zéro et au moins un pôle. En particulier le noyau de div est k^*.

Lemme

Il existe une correspondence entre les classes de k-isomorphisime de courbes projectives non sigulières et les classes de k-isomorphisime de corps de fonction en seule variable avec k est algébriquement clôs .

Plan

Espaces de Riemann-Roch

Pour tout divseur D de F/k, on définit l'espace de Riemann-Roch

$$\mathcal{L}(D) := \{x \in F^* : div(x) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Remarque

1. *$\mathcal{L}(D)$ est un k-espace vectoriel.*

Espaces de Riemann-Roch

Pour tout divseur D de F/k, on définit l'espace de Riemann-Roch

$$\mathcal{L}(D) := \{x \in F^* : div(x) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Remarque

1. *$\mathcal{L}(D)$ est un k-espace vectoriel.*
2. *On note $l(D)$ la dimension de $\mathcal{L}(D)$.*

Espaces de Riemann-Roch

Proposition

Soient D et G de deux diviseurs de F/k. On

1. *Si $D \leq G$, alors $\mathcal{L}(D)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(G)$ et*

$$dim_k(\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)) \leq deg(G) - deg(D);$$

Proposition

Soient D et G de deux diviseurs de F/k. On

1. *Si $D \leq G$, alors $\mathcal{L}(D)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(G)$ et*

$$dim_k(\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)) \leq deg(G) - deg(D);$$

2. $\mathcal{L}(0) = k;$

Espaces de Riemann-Roch

Proposition

Soient D et G de deux diviseurs de F/k. On

1. *Si $D \leq G$, alors $\mathcal{L}(D)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(G)$ et*
$$dim_k(\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)) \leq deg(G) - deg(D);$$
2. $\mathcal{L}(0) = k;$
3. $l(D) \geq 1$ *si* $D \geq 0;$

Proposition

Soient D et G de deux diviseurs de F/k. On

1. *Si $D \leq G$, alors $\mathcal{L}(D)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(G)$ et*

$$dim_k(\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)) \leq deg(G) - deg(D);$$

2. $\mathcal{L}(0) = k$;
3. $l(D) \geq 1$ *si* $D \geq 0$;
4. $l(D)$ *est fini pour tout* D;

Proposition

Soient D et G de deux diviseurs de F/k. On

1. *Si $D \leq G$, alors $\mathcal{L}(D)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(G)$ et*

$$dim_k(\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)) \leq deg(G) - deg(D);$$

2. $\mathcal{L}(0) = k$;
3. $l(D) \geq 1$ *si* $D \geq 0$;
4. $l(D)$ *est fini pour tout* D;
5. *Si* $D = G + div(x)$ *pour certain* $x \in F$ *non nul, alors* $l(D) = l(G)$;

Théorème

Pour tout $x \in F \setminus k$, on a

$$deg((x)_0) = [F : k(x)]$$

Espaces de Riemann-Roch

Corollaire

Pour tout $x \in F$ *non nul, on a* $deg(div(x)) = 0$. *De plus on a*

$$deg(div(x)_0) = deg((x)_\infty)$$

Corollaire

On a $l(D) = 0$ pour n'importe diviseur D tel que $deg(D) < 0$.

Remarque

1. *L'ensemble de diviseurs principaux de F forment un sous-groupe de $Div(F)$, on le note par $Princ(F)$.*

Remarque

1. *L'ensemble de diviseurs principaux de* F *forment un sous-groupe de* $Div(F)$*, on le note par* $Princ(F)$.
2. *Le groupe quotient* $Div(F)/Princ(F)$ *s'appelle le groupe de Picard (ou groupe des classes de diviseurs).*

Espaces de Riemann-Roch

Remarque

1. *L'ensemble de diviseurs principaux de F forment un sous-groupe de $Div(F)$, on le note par $Princ(F)$.*
2. *Le groupe quotient $Div(F)/Princ(F)$ s'appelle le groupe de Picard (ou groupe des classes de diviseurs).*
3. *Deux diviseurs D et G sont équivalents s'ils diffèrent d'un diviseur principal. Dans ce cas on écrit $D \sim G$.*

Remarque

1. *L'ensemble de diviseurs principaux de F forment un sous-groupe de $Div(F)$, on le note par $Princ(F)$.*
2. *Le groupe quotient $Div(F)/Princ(F)$ s'appelle le groupe de Picard (ou groupe des classes de diviseurs).*
3. *Deux diviseurs D et G sont équivalents s'ils diffèrent d'un diviseur principal. Dans ce cas on écrit $D \sim G$.*
4. *Si $D \sim G$ alors $deg(D) = deg(G)$ et $l(d) = l(G)$.*

Remarque

1. *L'ensemble de diviseurs principaux de F forment un sous-groupe de $Div(F)$, on le note par $Princ(F)$.*
2. *Le groupe quotient $Div(F)/Princ(F)$ s'appelle le groupe de Picard (ou groupe des classes de diviseurs).*
3. *Deux diviseurs D et G sont équivalents s'ils diffèrent d'un diviseur principal. Dans ce cas on écrit $D \sim G$.*
4. *Si $D \sim G$ alors $deg(D) = deg(G)$ et $l(d) = l(G)$.*
5. *Le groupe $Princ(F)$ est un sous groupe de $Div^0(F)$.*

Espaces de Riemann-Roch

Proposition

Les assertions suivantes sont equivalente:

1. *F est un corps de fonctions rationnelles sur k;*

Espaces de Riemann-Roch

Proposition

Les assertions suivantes sont equivalente:

1. *F est un corps de fonctions rationnelles sur k;*
2. *F est le corps k-rationnel d'une courbe k-isomorphe à $\mathbf{P}^1(k)$;*

Proposition

Les assertions suivantes sont equivalente:

1. *F est un corps de fonctions rationnelles sur k;*
2. *F est le corps k-rationnel d'une courbe k-isomorphe à $\mathbf{P}^1(k)$;*
3. *il existe $x \in F^*$ tel que $deg((x)_0) = 1$;*

Proposition

Les assertions suivantes sont equivalente:

1. *F est un corps de fonctions rationnelles sur k;*
2. *F est le corps k-rationnel d'une courbe k-isomorphe à $\mathbf{P}^1(k)$;*
3. *il existe $x \in F^*$ tel que $deg((x)_0) = 1$;*
4. *il existe une place rationelle P de F telle que $l(P) = 2$;*

Plan

Théorème de Riemann et Genre

Théorème

Pour tout corps de fonction F, il existe un entier positif g dépendant seulement de F tel que

$$l(D) \geq deg(D) + 1 - g$$

pour tout diviseur D de F.

Corollaire

Si $l(D) = deg(D) + 1 - g$ *et* $G \geq D$, *alors* $l(G) = deg(G) + 1 - g$

Théorème de Riemann et Genre

Corollaire

Il exsite un entier r dépend seulement de F tel que

$$l(D) = deg(D) + 1 - g$$

pour tout diviseur D de F avec $deg(D) \geq r$.

Définition

1. *L'entier positif g déterminé par le corollaire précedent s'appelle le* ***genre*** *de corps de fonctions F.*

Théorème de Riemann et Genre

Définition

1. *L'entier positif g déterminé par le corollaire précedent s'appelle le genre de corps de fonctions F.*
2. *Le genre d'une courbe projective non singulière $\mathcal{X}$ est le genre de corps de fonctions $k(\mathcal{X})$.*

Plan

Définition

Une adèle d'un corps de fonctions F/k est une application $\alpha : \mathbf{P}_F \longrightarrow F$ définie par $P \longmapsto \alpha_P$ telle que $\alpha_P \in \mathcal{O}_P$ pour un nombre fini de places de F.
On peut considérer une adèle comme un élément du produit direct $\prod_{P \in \mathbf{P}_F} F$

Remarque

1. *On note l'ensemble de toutes les adèles de F/k par $\mathcal{A}_F$ est appelé espace adèle de F.*

Le Théorème de Riemann-Roch

Remarque

1. *On note l'ensemble de toutes les adèles de* F/k *par* $\mathcal{A}_F$ *est appelé espace adèle de* F.
2. *Étant donné un élément* $x \in F$, *l'adèle principale de* x *est une adèle dont les composantes sont toutes égales à* x.

Remarque

1. *On note l'ensemble de toutes les adèles de F/k par $\mathcal{A}_F$ est appelé espace adèle de F.*
2. *Étant donné un élément $x \in F$, l'adèle principale de x est une adèle dont les composantes sont toutes égales à x.*
3. $F \hookrightarrow \mathcal{A}_F$.

Remarque

1. *On note l'ensemble de toutes les adèles de F/k par $\mathcal{A}_F$ est appelé espace adèle de F.*
2. *Étant donné un élément $x \in F$, l'adèle principale de x est une adèle dont les composantes sont toutes égales à x.*
3. $F \hookrightarrow \mathcal{A}_F$.
4. *la valuation v_P sur F s'étend naturellement à une valuation sur A_F en effet : $v_P(\alpha) := v_P(\alpha_P)$*

Le Théorème de Riemann-Roch

Définition

Pour tout diviseur $D \in Div(F)$, on pose

$$\mathcal{A}_F(D) := \{\alpha \in \mathcal{A}_F : v_P(\alpha) + v_P(D) \geq 0, \forall P \in \mathbf{P}_F\}$$

est un k sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_F$.

Proposition

Soit D et G de deux diviseurs de F/k tels que $D \leq G$. Alors on a:

1. $\mathcal{A}_F(D) \subseteq \mathcal{A}_F(G)$ *et*

$$dim_k(\mathcal{A}_F(G)/\mathcal{A}_F(D)) = deg(G) - deg(D).$$

Proposition

Soit D et G de deux diviseurs de F/k tels que $D \leq G$. Alors on a:

1. $\mathcal{A}_F(D) \subseteq \mathcal{A}_F(G)$ *et*

$$dim_k(\mathcal{A}_F(G)/\mathcal{A}_F(D)) = deg(G) - deg(D).$$

2.

$$dim_k((\mathcal{A}_F(G)+F)/(\mathcal{A}_F(D)+F)) = (deg(G)-l(G))-(deg(D)-l(D)).$$

Le Théorème de Riemann-Roch

Lemme

Si F est de genre g et D est un diviseur de F avec $l(D) = deg(D) + 1 - g$, Alors $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_F(D) + F$

Le Théorème de Riemann-Roch

Théorème

Si F/k est un corps de fonctions de genre g, alors pour tout diviseur D de F on a

$$l(D) = deg(D) + 1 - g + dim_k(\mathcal{A}_F/(\mathcal{A}_F(D) + F))$$

Définition

Le différentiel de Wiel pour un corps de fonctions F/k est est une application k-linéaire $\omega : \mathcal{A}_F \to k$ telle que $\omega|_{\mathcal{A}_F(D)+F} \equiv 0$. Pour certain diviseur $D \in Div(F)$.

1. On note Ω_F l'ensemble tous les différentiels de Wiel sur F et on note $\Omega_F(D)$ comme une collection de tous les différentiels de Wiel sur F qui sont identiquement nuls sur $\mathcal{A}_F(D) + F$.

1. On note Ω_F l'ensemble tous les différentiels de Wiel sur F et on note $\Omega_F(D)$ comme une collection de tous les différentiels de Wiel sur F qui sont identiquement nuls sur $\mathcal{A}_F(D) + F$.
2. $\Omega_F(D)$ est un k-espace vectoriel.
   De plus $\Omega_F(D)$ est un sous-espace vectoriel de Ω_F.

Le Théorème de Riemann-Roch

1. On note Ω_F l'ensemble tous les différentiels de Wiel sur F et on note $\Omega_F(D)$ comme une collection de tous les différentiels de Wiel sur F qui sont identiquement nuls sur $\mathcal{A}_F(D) + F$.
2. $\Omega_F(D)$ est un k-espace vectoriel.
   De plus $\Omega_F(D)$ est un sous-espace vectoriel de Ω_F.
3. Le théorème Précédent peut être reformulé comme

$$\imath(D) := l(D) - deg(D) - 1 + g = dim_k(\mathcal{A}_F/(\mathcal{A}_F(D) + F)$$

pour tout diviseur D de F.

Le Théorème de Riemann-Roch

1. On note Ω_F l'ensemble tous les différentiels de Wiel sur F et on note $\Omega_F(D)$ comme une collection de tous les différentiels de Wiel sur F qui sont identiquement nuls sur $\mathcal{A}_F(D) + F$.
2. $\Omega_F(D)$ est un k-espace vectoriel.
   De plus $\Omega_F(D)$ est un sous-espace vectoriel de Ω_F.
3. Le théorème Précédent peut être reformulé comme

$$\imath(D) := l(D) - deg(D) - 1 + g = dim_k(\mathcal{A}_F/(\mathcal{A}_F(D) + F)$$

   pour tout diviseur D de F.
4. Le lemme suivant fournit une seconde interprétation de la quantité $\imath(D)$.

Lemme

Pour tout diviseur D de F/k, on a

$$dim_k(\Omega_F(D)) = \imath(D).$$

Remarque

Une conséquence simple du lemme est que $\Omega_F \neq \{0\}$.

1. Pour tout $x \in F$ et pour tout $\in \mathcal{A}_F$, on définit $x\omega : \mathcal{A}_F \longrightarrow k$ définie par $(x\omega)(\alpha) = \omega(x\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_F$.

Théorème

On a

$$dim_k(\Omega_F) = 1$$

Le Théorème de Riemann-Roch

1. Pour tout $x \in F$ et pour tout $\in \mathcal{A}_F$, on définit $x\omega : \mathcal{A}_F \longrightarrow k$ définie par $(x\omega)(\alpha) = \omega(x\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_F$.
2. $x\omega$ est aussi un differentiel de Weil.

Théorème

On a

$$dim_k(\Omega_F) = 1$$

1. Pour tout $x \in F$ et pour tout $\in \mathcal{A}_F$, on définit $x\omega : \mathcal{A}_F \longrightarrow k$ définie par $(x\omega)(\alpha) = \omega(x\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_F$.
2. $x\omega$ est aussi un differentiel de Weil.
3. Si $\omega_{|_{\mathcal{A}_F(D)+F}} \equiv 0$ alors $(x\omega)_{|_{\mathcal{A}_F(D+div(x))+F}} \equiv 0$.

Théorème

On a

$$dim_k(\Omega_F) = 1$$

Lemme

Soit ω un differentiel de Wiel non nul de F. Alors il existe un unique diviseur $W \in \mathcal{M}(\omega) := \{D \in Div(F) : \omega|_{\mathcal{A}_F(D)+F} \equiv 0\}$ tel que $D \leq W$ pour tout $D \in \mathcal{M}(\omega)$.

Le Théorème de Riemann-Roch

Définition

Le diviseur (ω) d'un différentiel de Wiel non nul ω de F est l'unique diviseur W tel que :

1. $\omega_{|\mathcal{A}_F(W)+F} \equiv 0;$

Définition

Le diviseur (ω) *d'un différentiel de Wiel non nul* ω *de* F *est l'unique diviseur* W *tel que :*

1. $\omega_{|\mathcal{A}_F(W)+F} \equiv 0;$
2. *si* $\omega_{|\mathcal{A}_F(D)+F} \equiv 0$, *alors* $D \leq W = (\omega)$.
   Un diviseur (ω) *d;un differentiel de Wiel* ω *de* F *s'appelle le diviseur canonique de* F.

Lemme

Pour tout $x \in F$ *non nul et pour tout differentiel de Wiel* $\omega \in \Omega_F$, *on a* $(x\omega) = div(x) + (\omega)$

Le Théorème de Riemann-Roch

Théorème

Soit W un diviseur canonique de corps de fonctions F/k avec le genre g. Alors pour tout diviseur $D \in Div(F)$ on

$$l(D) = deg(D) + 1 - g + l(W - D).$$

En outre $l(D) = deg(D) + 1 - g$, l'orsque $deg(D) \geq 2g - 1$

Plan

Corollaire

Soit C une courbe projective non singulière de genre g et soit K un diviseur canonique de C. Alors $l(K) = dim_k(\mathcal{L}(K)) = g$ et $deg(K) = 2g - 2$.

Applications de théorème de Riemann-Roch

Corollaire

Soit C une courbe projective non singulière de genre g et soit $D \in Div(C)$. Si $deg(D) \geq 2g - 1$, alors $l(D) = deg(D) - g + 1$.

Corollaire

(Théorème de Clifford) *Soit* X *une courbe projective non singulière de genre* g *et soit* $D \in Div(X)$ *avec* C *un diviseur canonique de* X *. On suppose que* $l(D)$ *et* $l(C - D)$ *non nuls Alors* $2l(D) \leq deg(D) + 2$.

Corollaire

(Formule de Plucker) Soit X une courbe projective lisse de degré d. Alors x est de genre $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Merci pour votre attention