Sur les carquois liés

Yassine Ait Mohamed

November 12, 2024

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Plan de l'exposé

- K un corps algébriquement clos.

- K un corps algébriquement clos.
- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois.

- K un corps algébriquement clos.
- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois.
- KQ l'algèbre de chemins de Q.

- K un corps algébriquement clos.
- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois.
- KQ l'algèbre de chemins de Q.
- $Rep_K(Q) := \begin{cases} \text{Objets : Représentations de } Q \\ \\ \text{Morphismes : Morphismes de représentations} \end{cases}$

  (la catégorie de représentations de Q).

- K un corps algébriquement clos.
- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois.
- KQ l'algèbre de chemins de Q.
- $Rep_K(Q) := \begin{cases} \text{Objets : Représentations de } Q \\ \text{Morphismes : Morphismes de représentations} \end{cases}$

  (la catégorie de représentations de Q).
- $KQ\text{-Mod} := \begin{cases} \text{Objets : KQ-modules} \\ \text{Morphismes : Morphismes de KQ-modules} \end{cases}$

  (la catégorie de KQ-Modules).

- K un corps algébriquement clos.
- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois.
- KQ l'algèbre de chemins de Q.
- $Rep_K(Q) := \begin{cases} \text{Objets : Représentations de } Q \\ \text{Morphismes : Morphismes de représentations} \end{cases}$

  (la catégorie de représentations de Q).
- $KQ\text{-Mod} := \begin{cases} \text{Objets : KQ-modules} \\ \text{Morphismes : Morphismes de KQ-modules} \end{cases}$

  (la catégorie de KQ-Modules).
- Si $V = (V_a, V_\alpha)_{(a,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$ une représentation de Q et $c = (a|\alpha_1, \ldots, \alpha_r|b)$ un chemin non trivial dans Q. Alors l'évaluation de V en c est l'application linéaire définie par:

$$ev_c := V_{\alpha_r} \circ \cdots \circ V_{\alpha_r} : V_a \longrightarrow V_b$$

Soit Q un carquois fini.

Théorème

La catégorie des représentations de carquois Q est équivalente à la catégorie de KQ-modules.

La démonstration se faisait en trois étapes :

1^{er} étape: La construction de foncteur $\mathcal{F} : Rep_K(Q) \longrightarrow KQ$-Mod:

Soit $V = (V_a, V_\alpha)_{(a,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$ une représentation de Q.

- $\mathcal{F}(V) := \bigoplus_{a\in Q_0} V_a$ (K-espace vectoriel).

La démonstration se faisait en trois étapes :

1^{er} étape: La construction de foncteur $\mathcal{F} : Rep_K(Q) \longrightarrow KQ$-Mod:

Soit $V = (V_a, V_\alpha)_{(a,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$ une représentation de Q.

- $\mathcal{F}(V) := \bigoplus_{a\in Q_0} V_a$ (K-espace vectoriel).
- Pour tout $a \in Q_0$:
  $j_a : V_a \hookrightarrow \mathcal{F}(V)$ (l'injection canonique).
  $\pi_a : \mathcal{F}(V) \twoheadrightarrow V_a$ (la projection canonique).

- $\mathcal{F}(V)$ est un KQ-module via la modulation suivante: Soit $c = (a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n|b)$ un chemin dans KQ et $m = (m_d)_{d \in Q_0} \in \mathcal{F}(V)$. Alors:

$$c \cdot m := j_b \circ ev_c \circ \pi_a(m) \in \mathcal{F}(V).$$

- $\mathcal{F}(V)$ est un KQ-module via la modulation suivante:
  Soit $c = (a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n|b)$ un chemin dans KQ et $m = (m_d)_{d \in Q_0} \in \mathcal{F}(V)$. Alors:

$$c \cdot m := j_b \circ ev_c \circ \pi_a(m) \in \mathcal{F}(V).$$

- Soit $W = (W_a, W_\alpha)_{(a,\alpha) \in Q_0 \times Q_1}$ une représentation de Q et $\phi = (f_a)_{a \in Q_0} : V \longrightarrow W$ un morphisme de représentation. Alors ϕ induit un morphisme $\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$ définie par:

$$\mathcal{F}(\phi) := \bigoplus_{a \in Q_0} f_a$$

$\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$ est:

- une application additive car les (f_a) sont additives.

$\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$ est:

- une application additive car les (f_a) sont additives.
- compatible avec la modulation i.e, pour tout $c = (x|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n|y) \in KQ$ et $m = (m_d)_{d \in Q_0} \in \mathcal{F}(V)$ on a

$$\mathcal{F}(\phi)(c \cdot m) = c \cdot \mathcal{F}(\phi)(m),$$

ceci découle directement de la commutativité deux diagrammes suivant:

$$\begin{tikzcd}
V_x \arrow[r, "V_{\alpha_n}\circ\cdots\circ V_{\alpha_1}"] \arrow[d, "f_x"'] & V_y \arrow[d, "f_y"] \\
W_x \arrow[r, "W_{\alpha_n}\circ\cdots\circ W_{\alpha_1}"] & W_y
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\pi_a"'] & \mathcal{F}(W) \arrow[d, "\pi_a"] \\
V_a \arrow[r, "f"'] & W_a
\end{tikzcd}$$

Soient $f : V \longrightarrow W$ et $g : W \longrightarrow T$ deux morphismes de représentation. Alors $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$. Ceci découle de fait que

$$\bigoplus_{a \in Q_0} (g_a \circ f_a) = \bigoplus_{a \in Q_0} g_a \circ \bigoplus_{a \in Q_0} f_a.$$

2$^{\text{ème}}$ étape: La construction de foncteur $\mathcal{G}$: KQ-Mod$\longrightarrow Rep_K(Q)$:
Soit M un KQ-module. Pour $a, b \in Q_0$ et $\alpha \in Q_1$ telle que $s(\alpha) = a$ et $t(\alpha) = b$ on définit:

- $\mathcal{G}(M)_a := e_a M$ (K-espace vectoriel).

2[ème] étape: La construction de foncteur $\mathcal{G} : KQ\text{-Mod} \longrightarrow Rep_K(Q)$:
Soit M un KQ-module. Pour $a, b \in Q_0$ et $\alpha \in Q_1$ telle que $s(\alpha) = a$ et $t(\alpha) = b$ on définit:

- $\mathcal{G}(M)_a := e_a M$ (K-espace vectoriel).
- $\mathcal{G}(M)_\alpha(e_a m) := e_b(\alpha \cdot m)$, pour tout $m \in M$ (une application K-linéaire).

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, squiggly] & b \arrow[d, squiggly] \\ e_a M \arrow[r, "\mathcal{G}(M)_\alpha"] & e_b M \end{tikzcd}$$

Donc $\mathcal{G}(M) := (\mathcal{G}(M)_a, \mathcal{G}(M)_\alpha)_{(a,\alpha) \in Q_0 \times Q_1}$ est une représentation de Q.

Soit N un KQ-module et $\psi : M \longrightarrow N$ un morphisme de KQ-modules. Alors ψ induit un morphisme de représentation: $\mathcal{G}(\psi) : \mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathcal{G}(N)$. Pour tout $a \in Q_0$, on a:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}(\psi)_a : & e_a M & \longrightarrow & e_a N \\ & e_a m & \longmapsto & e_a \psi(m) \end{array}$$

$\mathcal{G}(\psi)_a$ est une application K-linéaire.

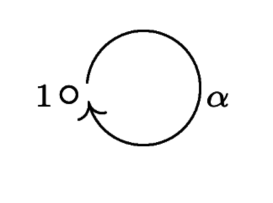
Pour tout $a, b \in Q_0$ et $\alpha \in Q_1$ telle que $s(\alpha) = a$ et $t(\alpha) = b$. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} e_a M \arrow[r, "\mathcal{G}(M)_\alpha"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\psi)_a"'] & e_b M \arrow[d, "\mathcal{G}(\psi)_b"] \\ e_a N \arrow[r, "\mathcal{G}(N)_\alpha"] & e_b N \end{tikzcd}$$

Soient $\psi : M \longrightarrow N$ et $\varphi : N \longrightarrow N'$ deux morphismes de KQ-modules.
Alors $\mathcal{G}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{G}(\varphi) \circ \mathcal{G}(\psi)$.
3ème étape: On vérifie facilement que $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong 1_{KQ-Mod}$ et $\mathcal{G}\mathcal{F} \cong 1_{Rep_K(Q)}$.

Exemple

$$Rep_K(Q) \simeq K[X]\text{-Mod}$$



En effet:
$KQ = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2\alpha + \ldots + \lambda_n\alpha^n | \lambda_i \in K \text{ et } n \in \mathbb{N}\} = K[\alpha] \simeq k[X]$

Soit Q un carquois fini et KQ son algèbre de chemins.
On note par $R_Q :=$ l'idéal engendré par toutes les flèches dans Q.
Pour $m \geq 2$, R_Q^m est l'idéal engendré par tous les chemins de longueur m.

Remarque

Comme K-espace vectoriel R_Q et R_Q^m peuvent être vue comme:

- $R_Q = \bigoplus_{s \geq 1} KQ_s$ avec KQ_s est le sous espace vectoriel de KQ de base $B_s = \{\text{Chemins de longueur s}\}$

Soit Q un carquois fini et KQ son algèbre de chemins.
On note par $R_Q :=$ l'idéal engendré par toutes les flèches dans Q.
Pour $m \geq 2$, R_Q^m est l'idéal engendré par tous les chemins de longueur m.

Remarque

Comme K-espace vectoriel R_Q et R_Q^m peuvent être vue comme:

- $R_Q = \bigoplus_{s \geq 1} KQ_s$ avec KQ_s est le sous espace vectoriel de KQ de base $B_s = \{\text{Chemins de longueur s}\}$
- $R_Q^m = \bigoplus_{r \geq m} KQ_r$ et base de KQ_r est consiste à tous les chemins de longueur supérieure ou égale à m

Soit $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de KQ.

Définition

$\mathcal{I}$ est dit un idéal admissible si et seulement s'il existe $m \geq 2$ tel que:

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$$

Exemples

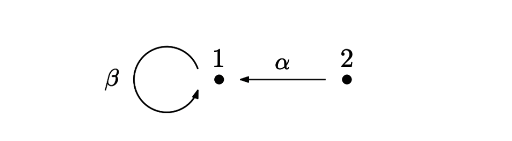
- Pour tout $m \geq 2$, R_Q^m est un idéal admissible.

Exemples

- Pour tout $m \geq 2$, R_Q^m est un idéal admissible.
- Si Q un carquois acyclique. Alors tout idéal $\mathcal{I}$ contenu dans R_Q^2 est un idéal admissible.

Exemples

- Pour tout $m \geq 2$, R_Q^m est un idéal admissible.
- Si Q un carquois acyclique. Alors tout idéal $\mathcal{I}$ contenu dans R_Q^2 est un idéal admissible.
- Q:



Alors $\mathcal{I} := < \alpha\beta, \beta^3 >$ est un idéal admissible.
En effet:

$$R_Q^3 \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

- Q :

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 \arrow[loop above, "\lambda"] & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Alors $\mathcal{I} :=< \alpha\beta, \alpha\beta\lambda, \lambda^2 >$ est un idéal admissible de KQ.
En effet:

$$R_Q^3 \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

- Q :

$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[dll, "\beta"'] & & \\ 1 \arrow[loop above, "\lambda"] & & & & 3 \arrow[ull, "\alpha"'] \arrow[llll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Alors $\mathcal{I} := < \alpha\beta, \alpha\beta\lambda, \lambda^2 >$ est un idéal admissible de KQ.
En effet:

$$R_Q^3 \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

- Q:

$$1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

Alors $\mathcal{I} := < \alpha\beta >$ est un idéal admissible.
En effet: Q est acyclique et $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal admissible de KQ.

Définition

- Le pair $(Q, \mathcal{I})$ est appelé un carquois lié. Le quotient $KQ/\mathcal{I}$ est appelé l'algèbre de carquois lié.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal admissible de KQ.

Définition

- Le pair $(Q, \mathcal{I})$ est appelé un carquois lié. Le quotient $KQ/\mathcal{I}$ est appelé l'algèbre de carquois lié.
- Une relation ρ dans Q est un élément de KQ tel que

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i,$$

où les ω_i sont des chemins dans Q de longueur au moins 2 tels que, si $i \neq j$, alors la source (resp. le but) de ω_i coïncide avec celle de ω_j.

- Si $m = 1$ alors ρ est appelée zéro relation.

- Si $m = 1$ alors ρ est appelée zéro relation.
- Si $\rho = \omega_1 - \omega_2$ alors ρ est appelée une relation de commutativité.

- Si $m = 1$ alors ρ est appelée zéro relation.
- Si $\rho = \omega_1 - \omega_2$ alors ρ est appelée une relation de commutativité.
- Si $< \rho_j \mid j \in J >$ est idéal admissible de KQ. On dit que Q est un carquois lié par les relations $(e_j)_{j \in J}$ ou par les relations $\rho_j = 0$ pour tout $j \in J$.

Exemple

On considère le carquois Q:

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 5 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\lambda"'] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 1 \\ & 4 \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

- Les zéros relations: $\alpha\beta$, $\theta\delta$, $\lambda\gamma$
- les relations de commutativité: $\alpha\beta - \theta\delta$, $\theta\delta - \lambda\gamma$, $\alpha\beta - \lambda\gamma$

Proposition

Soit Q est un carquois fini. Tout idéal admissible $\mathcal{I}$ de KQ est de type fini.

Le résultat découle de fait que la suite suivante:

$$0 \longrightarrow R_Q^m \hookrightarrow \mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{I}/R_Q^m \longrightarrow 0$$

est exacte.

Corollaire

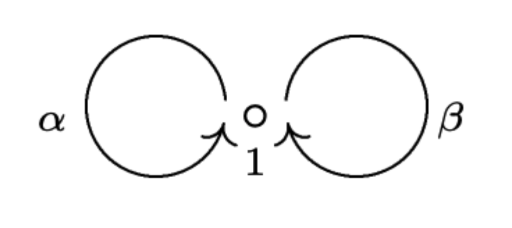
Soit Q un carquois fini et $\mathcal{I}$ un idéal admissible de KQ. Il existe un ensemble fini de relations $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ tel que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$.

Théorème

Soit Q un carquois fini connexe et $\mathcal{I}$ un idéal admissible de KQ. Alors $A = KQ/\mathcal{I}$ est une algèbre basique connexe de dimension finie ayant $E = \{e_a := \epsilon_a + \mathcal{I} / a \in Q_0\}$ comme ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux. De plus, $\mathrm{rad}(A) = R_Q/\mathcal{I}$.

Exemples

- Soit Q :



L'idéal $\mathcal{I} :=< \alpha\beta - \beta\alpha, \beta^2, \alpha^2 >$ est un idéal admissible de KQ. Alors $KQ/\mathcal{I}$ est une K-algèbre de dimension 4 de base $B = \{\bar{e}_1, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \overline{\alpha\beta}\}$.

- $$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

  L'idéal $\mathcal{I} := < \alpha\beta - \gamma\delta >$ est un idéal admissible de KQ et $KQ/\mathcal{I}$ est une K-algèbre de dimension 9 de base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \overline{\alpha\beta}\}$.

- Q :

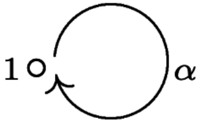
$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[r, "\alpha"] & 1 \\
5 \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & \\
 & 4 \arrow[r, "\gamma"] & 3 \arrow[uu, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Alors $\mathcal{I} :=< \theta\alpha, \lambda\gamma\beta >$ est un idéal admissible de KQ. $kQ/\mathcal{I}$ est une K-algèbre de dimension 11 de base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{\theta}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma}, \bar{\beta}, \overline{\lambda\gamma}, \overline{\gamma\beta}\}$.

Remarque

Si $\mathcal{I}$ est un idéal non admissible, l'algèbre $KQ/\mathcal{I}$ n'est généralement pas de dimension finie.

On considère le carquois suivant:



L'idéal $\mathcal{I} =< 0 >$ est un idéal non admissible et $KQ/\mathcal{I} \simeq KQ \simeq K[X]$ qui de dimension infinie.

Exemple

On considère le même carquois précédent et on pose $\mathcal{I} :=< \alpha^2 - \alpha >$. $\mathcal{I}$ est un idéal non admissible dont l'algèbre quotient est de dimension finie. En effet: $KQ/\mathcal{I} = \{\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha} / \lambda_1, \lambda_2 \in K\} \simeq K^2$.

Remarque

Si $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux idéaux admissibles de KQ. En général $KQ/\mathcal{I}_1$ et $KQ/\mathcal{I}_2$ ne sont pas isomorphe.

On considère le carquois Q:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

$\mathcal{I}_1 :=< \alpha\beta >$ et $\mathcal{I}_2 =< 0 >$ sont deux idéaux admissibles distincts. On a:

$$\big(dim(KQ/\mathcal{I}_1) = 5 \text{ et } dim(KQ/\mathcal{I}_2) = 6\big) \implies KQ/\mathcal{I}_1 \ncong KQ/\mathcal{I}_2.$$

Soit A une K-algèbre connexe de dimension finie et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'éléments idempotents primitifs orthogonaux de A.

Définition

Le carquois associée à A est noté par Q_A, définit comme:

- $(Q_A)_0 := \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq n$, j correspond à e_j.

Le carquois Q_A est fini.

Soit A une K-algèbre connexe de dimension finie et $\{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble complet d'éléments idempotents primitifs orthogonaux de A.

Définition

Le carquois associée à A est noté par Q_A, définit comme:

- $(Q_A)_0 := \{1, 2, \dots, n\}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq n$, j correspond à e_j.
- Pour tout $a, b \in (Q_A)_0$, les flèches $a \xrightarrow{\alpha} b$ sont en bijection avec les éléments de base de $e_a \left(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A\right) e_b$.

Le carquois Q_A est fini.

Proposition (Lem 3.2, [ASS])

Soit A une K-algèbre basique connexe de dimension finie.

- *Le carquois Q_A ne dépend pas de choix de l'ensemble complet d'éléments primitifs idempotents orthogonaux.*

Proposition (Lem 3.2, [ASS])

Soit A une K-algèbre basique connexe de dimension finie.

- *Le carquois Q_A ne dépend pas de choix de l'ensemble complet d'éléments primitifs idempotents orthogonaux.*
- *Q_A est connexe.*

Proposition

Soit Q un carquois connexe fini et $\mathcal{I}$ un idéal admissible de KQ. Alors $Q_A = Q$ avec $A := KQ/\mathcal{I}$.

Corollaire

Si $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux idéaux admissibles distincts de KQ. Alors $Q_A = Q_B$ où $A := KQ/\mathcal{I}_1$ et $B := KQ/\mathcal{I}_2$.

Proposition (Th 3.7, [ASS])

Soit A une algèbre basique connexe de dimension finie. Alors il existe un idéal admissible $\mathcal{I}$ de KQ_A telle que $A \simeq KQ_A/\mathcal{I}$.

L'isomorphisme $A \simeq KQ_A/\mathcal{I}$ est appelé une représentation de A.

Soit Q un carquois fini et $V = (V_a, V_\alpha)_{(a,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$ une représentation de Q et $\rho = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \omega_i$ une relation dans Q. Alors $ev_\rho := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i ev_{\omega_i}$.

Définition

Soit $\mathcal{I}$ est un idéal admissible de KQ. Alors une représentation $V = (V_a, V_\alpha)_{(a,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$ est dite liée à $\mathcal{I}$ si $ev_\rho = 0$ pour tout $\rho \in \mathcal{I}$.

Remarque

Puisque tout idéal admissible est de type finie. Alors V est lié à $\mathcal{I}$ si $ev_{\rho_i} = 0$ pour tout $\leq i \leq s$ avec $\mathcal{I} =< \rho_1, \ldots, \rho_s >$.

Théorème (Th 1.6, [ASS])

Soit $A := KQ/\mathcal{I}$ où Q est un carquois fini connexe et $\mathcal{I}$ est un idéal admissible de KQ. Alors les catégories A-Mod et $Rep_K(Q, \mathcal{I})$ sont équivalentes.
En particulier, A-mod et $rep_K(Q, \mathcal{I})$ sont équivalentes.

On peut utiliser la même construction précédente.

Merci pour votre attention!