Structures de Poisson sur les Coisotropes 1-Décalés

Yassine Ait Mohamed

Université de Sherbrooke

Travail en collaboration avec Maxence Mayrand

Plan

1. **Introduction : Quantification par déformation**

Plan

1. **Introduction : Quantification par déformation**
2. **Structures géométriques de base**

Plan

1. **Introduction : Quantification par déformation**
2. **Structures géométriques de base**
3. **Résultats récents sur structures de Poisson sur les 1-coisotropes décalées**

Plan

1. **Introduction : Quantification par déformation**
2. **Structures géométriques de base**
3. **Résultats récents sur structures de Poisson sur les 1-coisotropes décalées**
4. **Perspectives : Structures P_∞**

Mécanique Classique vs Mécanique Quantique

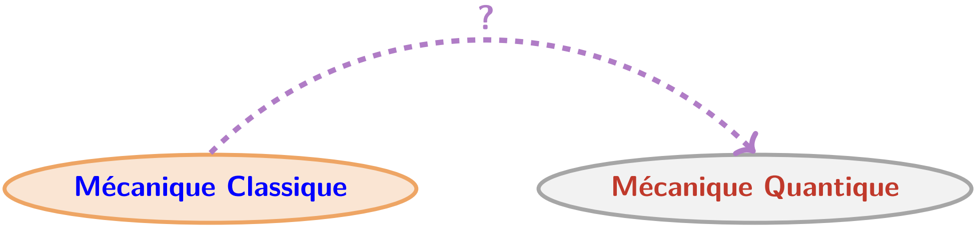
Mécanique Classique

Mécanique Classique vs Mécanique Quantique

Mécanique Classique

Mécanique Quantique

Mécanique Classique vs Mécanique Quantique



Mécanique Classique vs Mécanique Quantique

?

Mécanique Classique

Mécanique Quantique

Espace : Variété de Poisson (M, π)

Observables : Fonctions $f \in C^\infty(M)$

Structure : Crochet de Poisson $\{f, g\}$
Algèbre commutative

Mécanique Classique vs Mécanique Quantique

?

Mécanique Classique

Espace : Variété de Poisson (M, π)

Observables : Fonctions $f \in C^\infty(M)$

Structure : Crochet de Poisson $\{f, g\}$
Algèbre commutative

Mécanique Quantique

Espace : Espace de Hilbert $\mathcal{H}$

Observables : Opérateurs $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Structure : Commutateur $[\hat{A}, \hat{B}]$
Algèbre non-commutative

Comment quantifier ?

Comment quantifier ?

Approche Mathématique

Correspondance :

$$Q : C^\infty(M) \to \mathrm{Op}(\mathcal{H})$$

avec propriétés algébriques

Comment quantifier ?

Approche Mathématique

Correspondance :

$$Q \;:\; C^\infty(M) \to \mathrm{Op}(\mathcal{H})$$

avec propriétés algébriques

Approche Physique

Passage :

Classique (déterministe)

$\downarrow$

Quantique (probabiliste)

La correspondance de quantification

Niveau Classique

Algèbre : $C^\infty(M)$

Crochet : $\{f, g\}$

La correspondance de quantification

Niveau Classique

Algèbre : $C^\infty(M)$

Crochet : $\{f, g\}$

$$\downarrow$$

Quantification

$Q : f \mapsto \hat{f}$

La correspondance de quantification

Niveau Classique

Algèbre : $C^\infty(M)$

Crochet : $\{f, g\}$

Quantification

$Q : f \mapsto \hat{f}$

Niveau Quantique

Algèbre : $\mathrm{Op}(\mathcal{H})$

Commutateur : $[\hat{f}, \hat{g}]$

Niveau Classique

Algèbre : $C^\infty(M)$

Crochet : $\{f, g\}$

Quantification

$Q : f \mapsto \hat{f}$

Conditions :

(i) $Q(1) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$

(ii) $[Q(f), Q(g)]$
$= i\hbar Q(\{f, g\})$

Niveau Quantique

Algèbre : $\mathrm{Op}(\mathcal{H})$

Commutateur : $[\hat{f}, \hat{g}]$

1978

Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer

Deformation theory and quantization

1978

Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer

Deformation theory and quantization

Problème

Existence de $\star$ sur variété de Poisson

1978
Bayen, Flato, Fronsdal,
Lichnerowicz, Sternheimer

Deformation theory and quantization

Problème
Existence de $\star$ sur
variété de Poisson

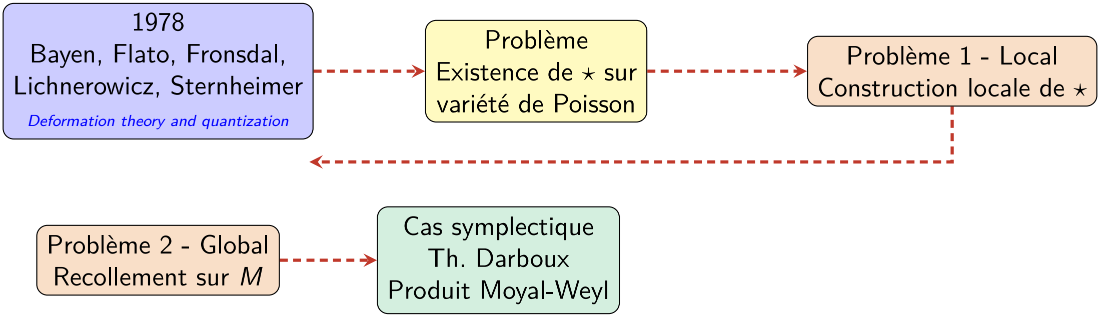
Problème 1 - Local
Construction locale de $\star$

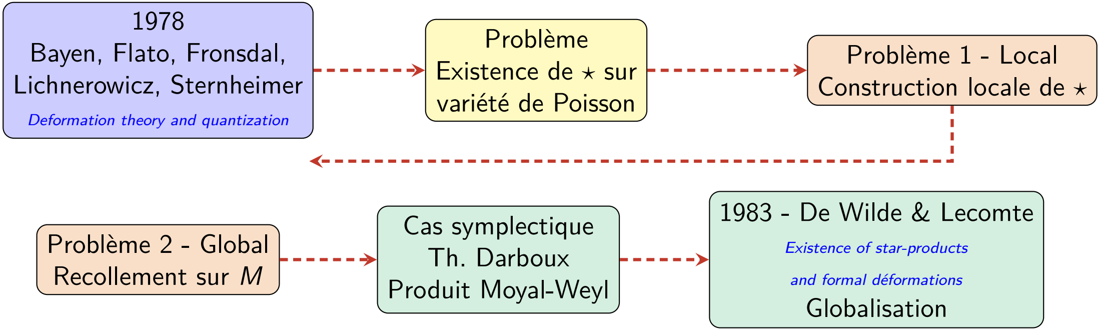
1978
Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer
Deformation theory and quantization

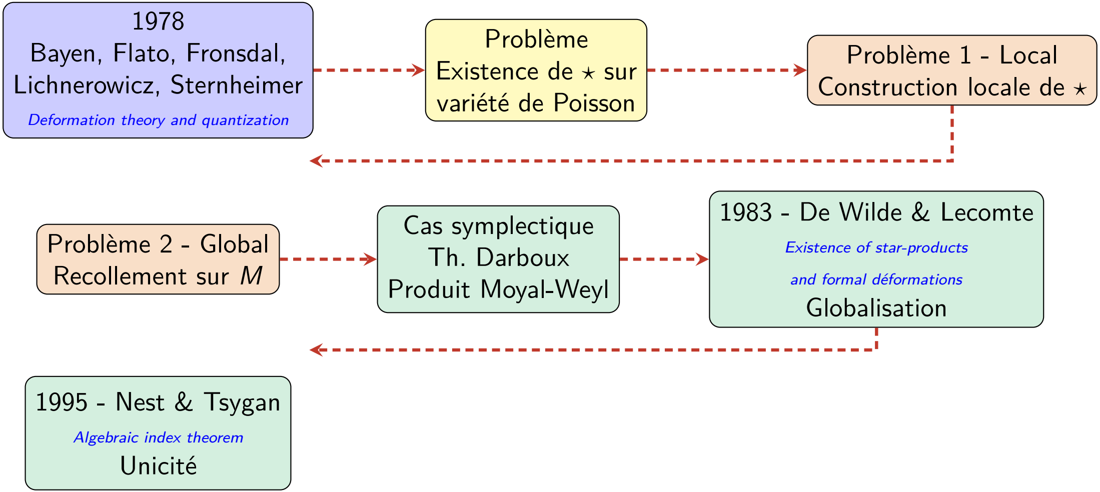
Problème
Existence de $\star$ sur variété de Poisson

Problème 1 - Local
Construction locale de $\star$

Problème 2 - Global
Recollement sur M


1978
Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer
Deformation theory and quantization
Problème
Existence de $\star$ sur variété de Poisson
Problème 1 - Local
Construction locale de $\star$
Problème 2 - Global
Recollement sur M
Cas symplectique
Th. Darboux
Produit Moyal-Weyl


1978
Bayen, Flato, Fronsdal,
Lichnerowicz, Sternheimer
Deformation theory and quantization
Problème
Existence de $\star$ sur
variété de Poisson
Problème 1 - Local
Construction locale de $\star$
Problème 2 - Global
Recollement sur M
Cas symplectique
Th. Darboux
Produit Moyal-Weyl
1983 - De Wilde & Lecomte
Existence of star-products
and formal déformations
Globalisation


1978
Bayen, Flato, Fronsdal,
Lichnerowicz, Sternheimer
Deformation theory and quantization
Problème
Existence de $\star$ sur
variété de Poisson
Problème 1 - Local
Construction locale de $\star$
Problème 2 - Global
Recollement sur M
Cas symplectique
Th. Darboux
Produit Moyal-Weyl
1983 - De Wilde & Lecomte
Existence of star-products
and formal déformations
Globalisation
1995 - Nest & Tsygan
Algebraic index theorem
Unicité

1978
Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer
Deformation theory and quantization

Problème
Existence de $\star$ sur variété de Poisson

Problème 1 - Local
Construction locale de $\star$

Problème 2 - Global
Recollement sur M

Cas symplectique
Th. Darboux
Produit Moyal-Weyl

1983 - De Wilde & Lecomte
Existence of star-products and formal déformations
Globalisation

1995 - Nest & Tsygan
Algebraic index theorem
Unicité

1997 - Kontsevich
Deformation quantization of Poisson manifolds
Cas général

Variété de Poisson : deux points de vue

Variété de Poisson
1970-1980

Variété de Poisson : deux points de vue

Variété de Poisson
1970-1980

Algébriquement

Variété lisse M munie d'un

Crochet de Poisson

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

(Siméon Denis Poisson, 1809)

Variété de Poisson : deux points de vue

Variété de Poisson
1970-1980

Algébriquement	**Géométriquement**
Variété lisse M munie d'un	Variété lisse M munie d'un
Crochet de Poisson	**Bivecteur de Poisson**
$\{\cdot\,,\,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$	$\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ avec $[\pi,\pi]_{SN} = 0$

(Siméon Denis Poisson, 1809)

$$(M_1, \pi_1) \xrightarrow{\varphi} (M_2, \pi_2)$$

$$
\begin{tikzcd}
(M_1, \pi_1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed] & (M_2, \pi_2) \arrow[d, dashed] \\
\begin{array}{c} C^\infty(M_1) \\ \{f, g\}_1 := \pi_1(df, dg) \end{array} & \begin{array}{c} C^\infty(M_2) \\ \{f, g\}_2 := \pi_2(df, dg) \end{array}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
(M_1, \pi_1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed] & (M_2, \pi_2) \arrow[d, dashed] \\
\begin{array}{c} C^\infty(M_1) \\ \{f, g\}_1 := \pi_1(df, dg) \end{array} & \begin{array}{c} C^\infty(M_2) \\ \{f, g\}_2 := \pi_2(df, dg) \end{array} \arrow[l, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
(M_1, \pi_1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed] & (M_2, \pi_2) \arrow[d, dashed] \\
\begin{array}{c} C^\infty(M_1) \\ \{f, g\}_1 := \pi_1(df, dg) \end{array} & \begin{array}{c} C^\infty(M_2) \\ \{f, g\}_2 := \pi_2(df, dg) \end{array} \arrow[l, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}
$$

Condition de compatibilité :

$$d\varphi \circ \pi_1^\sharp = \pi_2^\sharp \circ d\varphi^*$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \varphi, \quad \forall f, g \in C^\infty(M_2)$$

Sous-variété coisotrope

(1988 - A. Weinstein)

Sous-variété coisotrope

(1988 - A. Weinstein)

approche algébrique

Idéal $I_C \subset C^\infty(M)$ tel que

$\{I_C, I_C\} \subset I_C$, où

$I_C := \{f \in C^\infty(M) : f_{|C} = 0\}$

Sous-variété coisotrope

(1988 - A. Weinstein)

approche algébrique

Idéal $I_C \subset C^\infty(M)$ tel que

$\{I_C, I_C\} \subset I_C$, où

$I_C := \{f \in C^\infty(M) : f_{|C} = 0\}$

approche géométrique

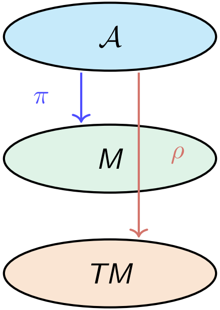
Sous-variété $C \subset M$ telle que

$\pi^\sharp(N^*C) \subset TC$

où $N^*C := (TC)^0 \subset T^*M|_C$

Algébroïde de Lie

$\mathcal{A} \Rightarrow M$ Jean Pradines (1967)



Algébroïde de Lie

$\mathcal{A} \Rightarrow M$ Jean Pradines (1967)

$[\cdot,\cdot]_{\mathcal{A}} : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{A})$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dd, bend left, "\rho"] \\
M \\
TM
\end{tikzcd}
$$

Algébroïde de Lie

$\mathcal{A} \Rightarrow M$ Jean Pradines (1967)

$$[\cdot,\cdot]_{\mathcal{A}} : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{A})$$

$$[X, fY]_{\mathcal{A}} = f[X,Y]_{\mathcal{A}} + (\rho(X)\cdot f)Y$$
$$\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{A}), f \in C^{\infty}(M)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dd, bend left, "\rho"] \\
M \\
TM
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{A} \Rightarrow M$ Jean Pradines (1967)

$[\cdot,\cdot]_{\mathcal{A}} : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{A})$

$$[X, fY]_{\mathcal{A}} = f[X, Y]_{\mathcal{A}} + (\rho(X) \cdot f)Y$$
$$\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{A}), f \in C^\infty(M)$$

Règle de Leibniz

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dd, bend left, "\rho"] \\ M \\ TM \end{tikzcd}$$

$$\rho([X, Y]_{\mathcal{A}}) = [\rho(X), \rho(Y)]_{TM}$$
morphisme de Lie

Compatibilité

Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

$\mathcal{G}$ espace des flèches

Groupoïde de Lie

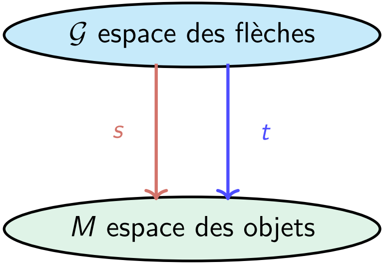
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

$\mathcal{G}$ espace des flèches

M espace des objets

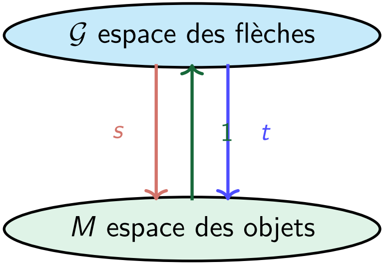
Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**



Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**



Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

$m : \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G}, \quad (g, h) \mapsto gh$

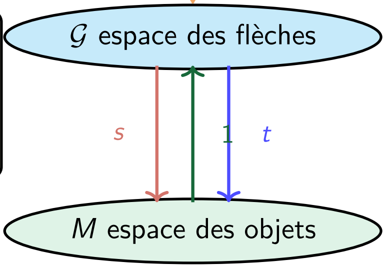
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \text{ espace des flèches} \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] \\
M \text{ espace des objets} \arrow[u, "1" description]
\end{tikzcd}$$

Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

$$m : \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G}, \quad (g,h) \mapsto gh$$

$$\begin{aligned} g(hk) &= (gh)k \\ g1_{s(g)} &= g, \; 1_{t(g)}g = g \\ g^{-1}g &= 1_{s(g)}, \\ gg^{-1} &= 1_{t(g)} \end{aligned}$$



Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

$m : \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G}, \quad (g,h) \mapsto gh$

$$
\begin{aligned}
g(hk) &= (gh)k \\
g1_{s(g)} &= g, \; 1_{t(g)}g = g \\
g^{-1}g &= 1_{s(g)}, \\
gg^{-1} &= 1_{t(g)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \text{ espace des flèches} \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] \\
M \text{ espace des objets} \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}
$$

s, t sont des submersions et 1 est un plongement

$m, i, 1, (s,t)$ sont des applications lisses

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ **Charles Ehresmann (1959)**

$m : \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G}, \ \ (g, h) \mapsto gh$

$$\begin{aligned} g(hk) &= (gh)k \\ g1_{s(g)} = g, \ 1_{t(g)}g &= g \\ g^{-1}g &= 1_{s(g)}, \\ gg^{-1} &= 1_{t(g)} \end{aligned}$$

$\mathcal{G}$ espace des flèches

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] \\ M \arrow[u, "1"] \end{tikzcd}$$

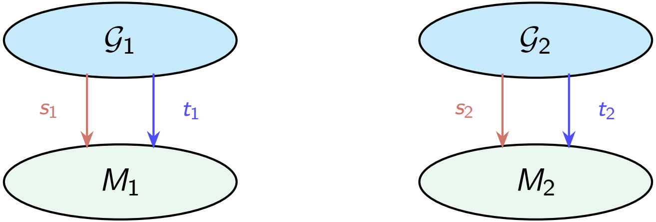
M espace des objets

s, t sont des submersions et 1 est un plongement

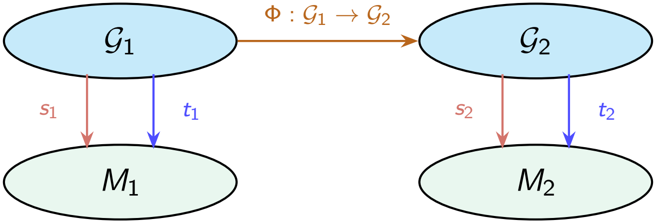
$m, i, 1, (s, t)$ sont des applications lisses

Inversion :
$i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \ g \mapsto g^{-1}$

Morphismes de groupoïdes de Lie



Morphismes de groupoïdes de Lie



Morphismes de groupoïdes de Lie

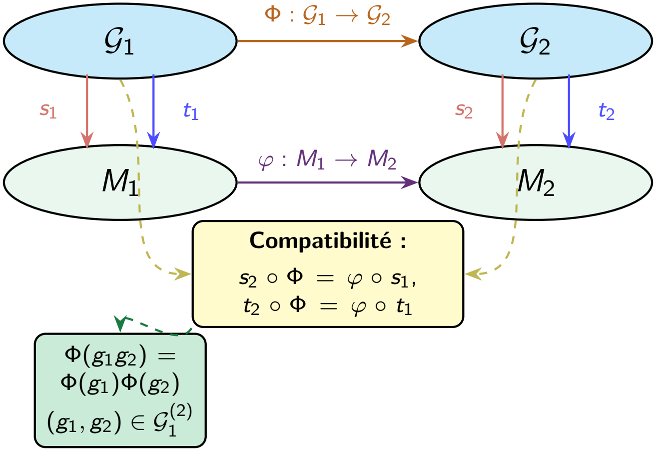
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "\Phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2"] \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "t_1"] & \mathcal{G}_2 \arrow[d, shift right, "s_2"'] \arrow[d, shift left, "t_2"] \\
M_1 \arrow[r, "\varphi : M_1 \to M_2"] & M_2
\end{tikzcd}
$$

Morphismes de groupoïdes de Lie

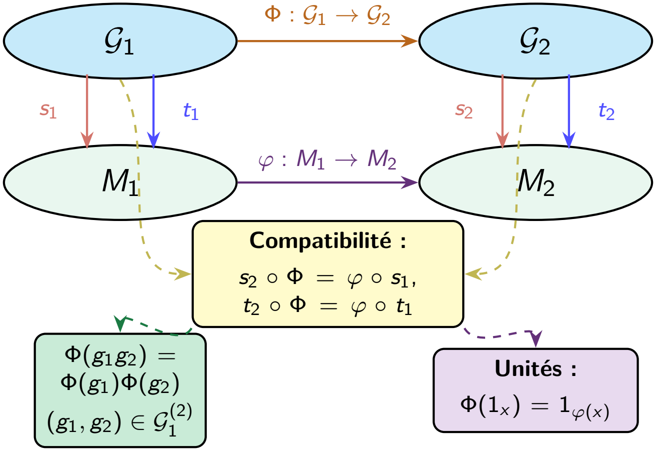
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "\Phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2"] \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "t_1"] & \mathcal{G}_2 \arrow[d, shift right, "s_2"'] \arrow[d, shift left, "t_2"] \\
M_1 \arrow[r, "\varphi : M_1 \to M_2"] & M_2
\end{tikzcd}
$$

Compatibilité :

$$s_2 \circ \Phi = \varphi \circ s_1,$$
$$t_2 \circ \Phi = \varphi \circ t_1$$


$\mathcal{G}_1$
$\mathcal{G}_2$
$\Phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$
s_1
t_1
s_2
t_2
M_1
M_2
$\varphi : M_1 \to M_2$
Compatibilité :
$s_2 \circ \Phi = \varphi \circ s_1,$
$t_2 \circ \Phi = \varphi \circ t_1$
$\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)$
$(g_1, g_2) \in \mathcal{G}_1^{(2)}$

Morphismes de groupoïdes de Lie



Intégration d'un algébroïde de Lie

Algébroïde de Lie

$\mathcal{A} \Rightarrow M$

Attention

Il existe des algébroïdes de Lie qui ne sont **pas intégrables**. **Crainic & Fernandes**
Integrability of Lie brackets
Ann. of Math. (2003)

Intégration d'un algébroïde de Lie

Algébroïde de Lie
$\mathcal{A} \Rightarrow M$

$\downarrow$

$\mathcal{A}$ est intégrable ssi
$\exists$ groupoïde de Lie
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$
et $\psi : \mathcal{A}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{A}$
isomorphisme d'algébroïdes

Attention

Il existe des algébroïdes de Lie qui ne sont **pas intégrables**. **Crainic & Fernandes**
Integrability of Lie brackets
Ann. of Math. (2003)

Intégration d'un algébroïde de Lie

Algébroïde de Lie

$\mathcal{A} \Rightarrow M$

$\mathcal{A}$ est intégrable ssi

$\exists$ groupoïde de Lie
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$

et $\psi : \mathcal{A}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{A}$

isomorphisme d'algébroïdes

$(\mathcal{G}, \psi)$ est une
intégration de $\mathcal{A}$

Intégration d'un algébroïde de Lie

Algébroïde de Lie
$\mathcal{A} \Rightarrow M$

↓

$\mathcal{A}$ est intégrable ssi
$\exists$ groupoïde de Lie
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$
et $\psi : \mathcal{A}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{A}$
isomorphisme d'algébroïdes

↓

$(\mathcal{G}, \psi)$ est une
intégration de $\mathcal{A}$

Attention

Il existe des algébroïdes de Lie qui ne sont **pas intégrables**. **Crainic & Fernandes**
Integrability of Lie brackets
Ann. of Math. (2003)

Algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie

Groupoïde de Lie

$$\mathcal{G} \rightrightarrows M$$

Algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie

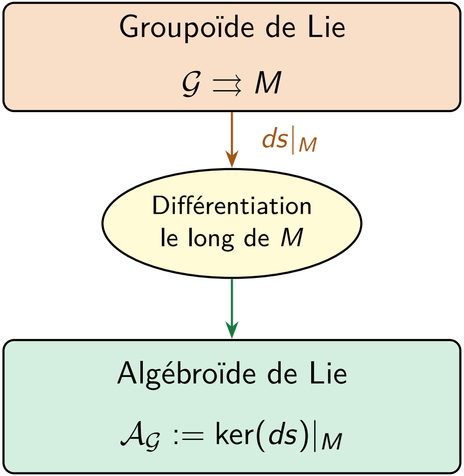
Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$

$\Big\downarrow \; ds|_M$

Différentiation
le long de M

Algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie



Algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie

Groupoïde de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$

$\downarrow ds|_M$

Différentiation le long de M

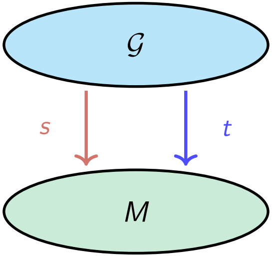
$\downarrow$

Algébroïde de Lie

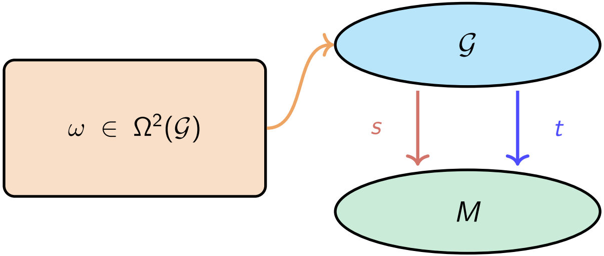
$\mathcal{A}_\mathcal{G} := \ker(ds)|_M$

- **Fibré :** $\mathcal{A}_\mathcal{G} \to M$
- **Ancrage :** $\rho := dt|_{\mathcal{A}_\mathcal{G}}$
- **Crochet :** $[\cdot,\cdot]$ défini par identification des sections de $\mathcal{A}_\mathcal{G}$ avec les champs de vecteurs sur $\mathcal{G}$ tangents aux s-fibres et invariants à droite i.e, $dR_h(X_g) = X_{hg}$ où $R_h : s^{-1}(t(h)) \to s^{-1}(s(h))$, $g \mapsto hg$

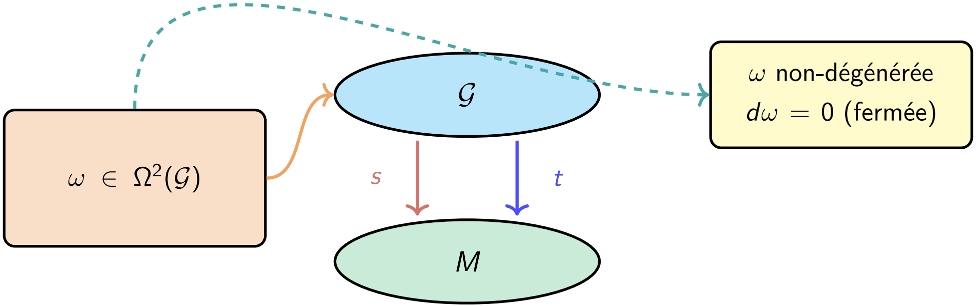
Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$



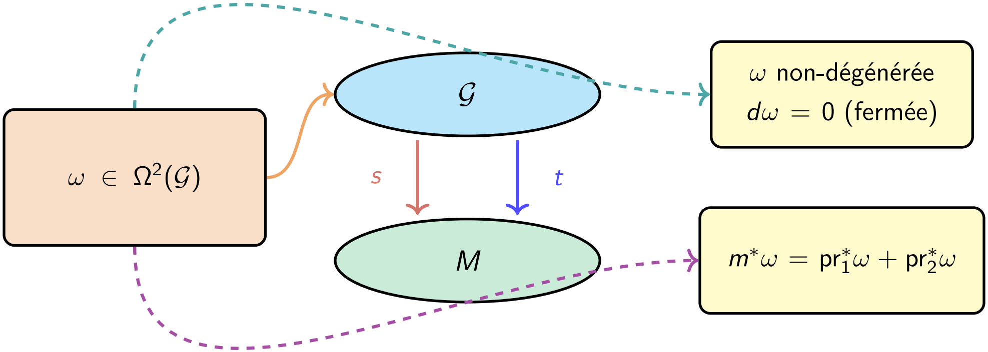
Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$



Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$



Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$



Weinstein (1987) Symplectic groupoids and Poisson manifolds

Groupoïde Symplectique

$$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$$

Groupoïde Symplectique
$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$

$M \subset (\mathcal{G}, \omega)$

sous-variété

Lagrangienne

$\omega|_M = 0, \ \dim M = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}$

Groupoïde Symplectique
$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$

$M \subset (\mathcal{G}, \omega)$

sous-variété

Lagrangienne

$\omega|_M = 0$, $\dim M = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}$

M admet une structure de Poisson π

$t : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi)$

morphisme de Poisson

Groupoïde Symplectique
$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$

$M \subset (\mathcal{G}, \omega)$
sous-variété
Lagrangienne

$\omega|_M = 0$, $\dim M = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}$

M admet une
structure de Poisson π

$t : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi)$

morphisme de Poisson

Isomorphisme
$\mathcal{A}_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$
d'algébroïdes

via $\sigma_\omega : a \mapsto 1^*(i_a \omega)$

Groupoïde Symplectique
$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$

$M \subset (\mathcal{G}, \omega)$
sous-variété
Lagrangienne

$\omega|_M = 0$, $\dim M = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}$

M admet une
structure de Poisson π

$t : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi)$
morphisme de Poisson

Isomorphisme
$\mathcal{A}_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$
d'algébroïdes

via $\sigma_\omega : a \mapsto 1^*(i_a \omega)$

T^*M est **intégrable** comme algébroïde de Lie
et $\mathcal{G}$ est son intégration symplectique

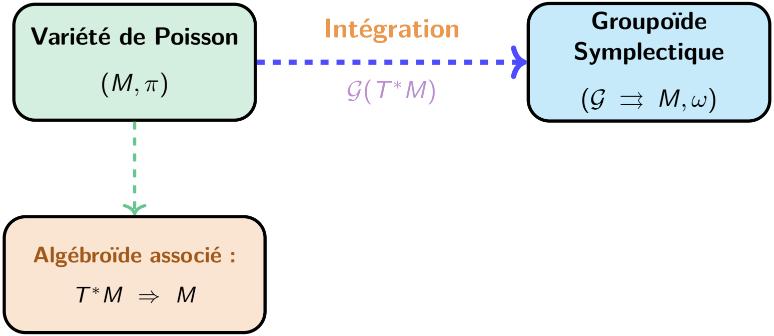
Variété de Poisson

(M, π)

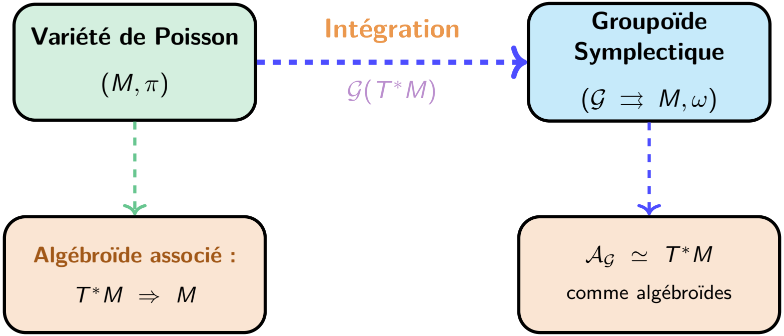
Intégration des Variétés de Poisson

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \begin{array}{c}\textbf{Variété de Poisson}\\ (M,\pi)\end{array} \arrow[r, dashed, "\textbf{Intégration}", "\mathcal{G}(T^*M)"'] & \begin{array}{c}\textbf{Groupoïde}\\ \textbf{Symplectique}\\ (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)\end{array} \end{tikzcd}$$

Intégration des Variétés de Poisson



Intégration des Variétés de Poisson



Variété de Poisson

(M, π)

Intégration

$\mathcal{G}(T^*M)$

Groupoïde Symplectique

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$

Algébroïde associé :

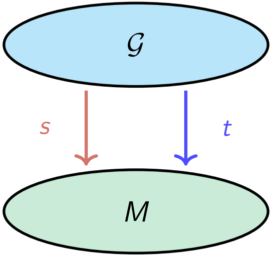
$T^*M \Rightarrow M$

$\mathcal{A}_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$

comme algébroïdes

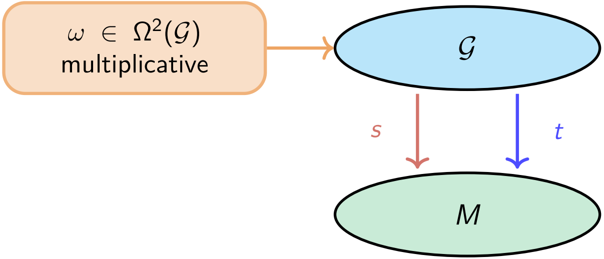
Théorème (Kirill C. H. Mackenzie, Ping Xu)

Toute variété de Poisson (M, π) intégrable admet un **groupoïde symplectique s-simplement connexe unique**



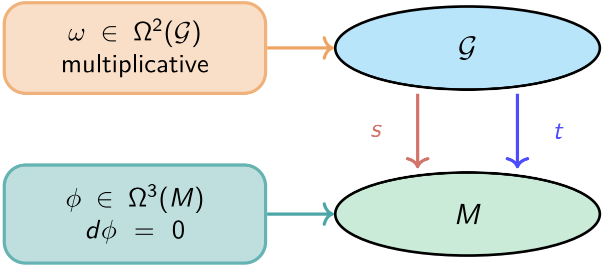
Ping Xu – Momentum maps and Morita equivalence (2004)

Groupoïde Quasi-Symplectique



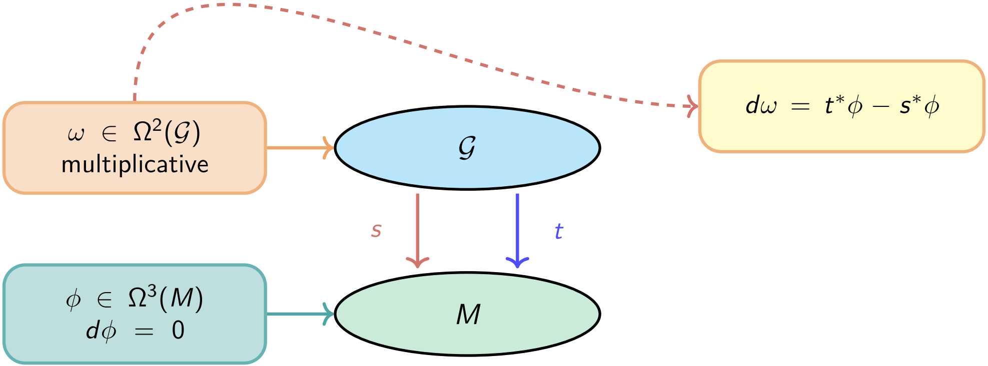
Ping Xu – Momentum maps and Morita equivalence (2004)

Groupoïde Quasi-Symplectique



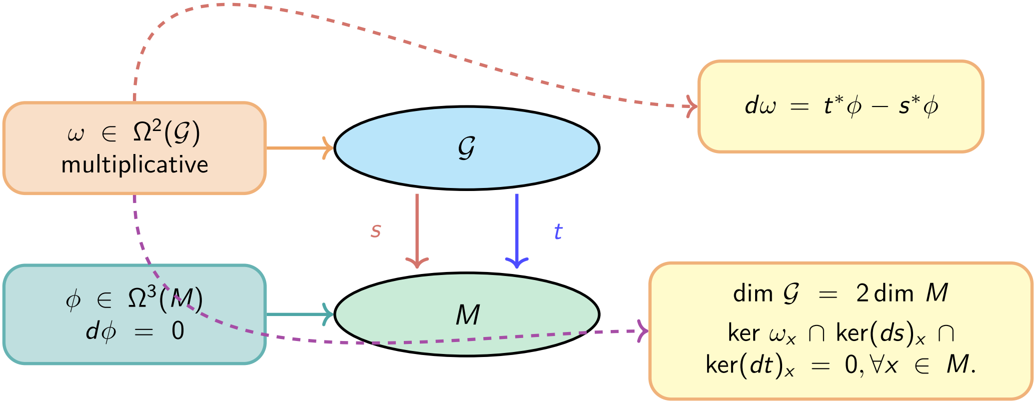
Ping Xu – Momentum maps and Morita equivalence (2004)

Groupoïde Quasi-Symplectique



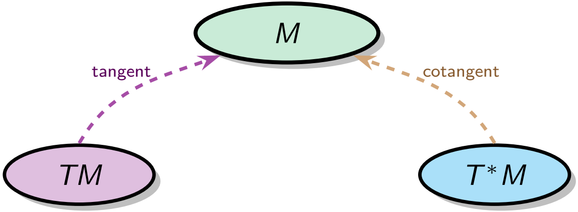
Ping Xu – Momentum maps and Morita equivalence (2004)

Groupoïde Quasi-Symplectique

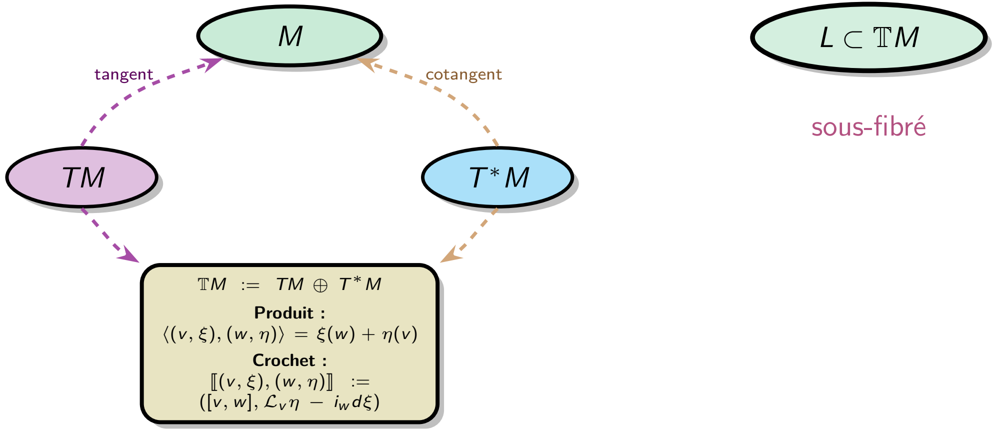


Ping Xu – Momentum maps and Morita equivalence (2004)

Structure de Dirac sur une Variété



Structure de Dirac sur une Variété



Structure de Dirac sur une Variété

M

tangent: $TM \to M$

cotangent: $T^*M \to M$

TM $\quad$ T^*M

$\mathbb{T}M \; := \; TM \oplus T^*M$

Produit :
$\langle (v,\xi),(w,\eta)\rangle = \xi(w) + \eta(v)$

Crochet :
$[\![(v,\xi),(w,\eta)]\!] \; := \; ([v,w], \mathcal{L}_v\eta \; - \; i_w d\xi)$

$L \subset \mathbb{T}M$

sous-fibré

Structure de Dirac :

L sous-fibré vérifiant :

- **Maximalement isotrope :**
  $\dim L = \dim M$
  $L = L^\perp$ pour
  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (L est dit un sous fibré Lagrangain)
- **Involutif :**
  $\Gamma(L)$ fermé par
  le crochet de Courant

Structure de Dirac Tordue

Crochet tordu par $\phi \in \Omega^3(M)$

$$[\![(v,\xi),(w,\eta)]\!]_\phi := ([v,w], \mathcal{L}_v\eta - i_w d\xi + i_w i_v \phi)$$

$L \subset \mathbb{T}M$

sous-fibré Lagrangien

$\downarrow$ fermé par $[\![\cdot,\cdot]\!]_\phi$

Structure de Dirac tordue par ϕ

Structure de Dirac Tordue Induite

$$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$$

groupoïde quasi-symplectique

$$\Big\downarrow \ \textbf{induit sur } M$$

$$(L_M, \phi)$$

structure de Dirac tordue sur M

Structure de Dirac Tordue Induite

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

groupoïde quasi-symplectique

$$\Big\downarrow \ \textbf{induit sur } M$$

(L_M, ϕ)

structure de Dirac tordue sur M

Structure induite

$L_M \subset \mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$

$$L_M := \mathrm{im}(\rho_{\mathcal{G}}, \sigma_\omega)$$

$$= \{(\rho_{\mathcal{G}}(a), \sigma_\omega(a)) \mid a \in A_{\mathcal{G}}\}$$

Structure de Dirac Tordue Induite

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

groupoïde quasi-symplectique

$\Big\downarrow$ **induit sur M**

(L_M, ϕ)

structure de Dirac tordue sur M

Structure induite

$L_M \subset \mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$

$$L_M := \mathrm{im}(\rho_{\mathcal{G}}, \sigma_\omega)$$

$$= \{(\rho_{\mathcal{G}}(a), \sigma_\omega(a)) \mid a \in A_{\mathcal{G}}\}$$

[Henrique Bursztyn et al. Théorème 2.2 *Integration of Twisted Dirac Brackets*]

Intégration d'une structure de Dirac Tordue

$$(L, \phi)$$

structure de Dirac tordue sur M

$$\Big\downarrow \text{ intégration}$$

$$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$$

groupoïde quasi-symplectique

Intégration d'une structure de Dirac Tordue

(L, ϕ)

structure de Dirac
tordue sur M

$\Big\downarrow$ **intégration**

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

groupoïde quasi-
symplectique

Construction

Donnée : (L, ϕ)

Étapes :

Intégration d'une structure de Dirac Tordue

(L, ϕ)

structure de Dirac tordue sur M

$$\Big\downarrow \text{intégration}$$

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

groupoïde quasi-symplectique

Construction

Donnée : (L, ϕ)

Étapes :

1. Intégrer l'algébroïde de Lie $A = \mathrm{pr}_{TM}(L)$ en groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows M$

(L, ϕ)

structure de Dirac tordue sur M

$\big\downarrow$ **intégration**

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

groupoïde quasi-symplectique

Construction

Donnée : (L, ϕ)

Étapes :

1. Intégrer l'algébroïde de Lie $A = \mathrm{pr}_{TM}(L)$ en groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows M$
2. Construire $\omega \in \Omega^2(\mathcal{G})$ multiplicative telle que :
   - $d\omega = s^*\phi - t^*\phi$
   - $L = \mathrm{im}(\rho_{\mathcal{G}}, \sigma_{\omega})$

Intégration d'une structure de Dirac Tordue

(L, ϕ)

structure de Dirac tordue sur M

intégration

$(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

groupoïde quasi-symplectique

Construction

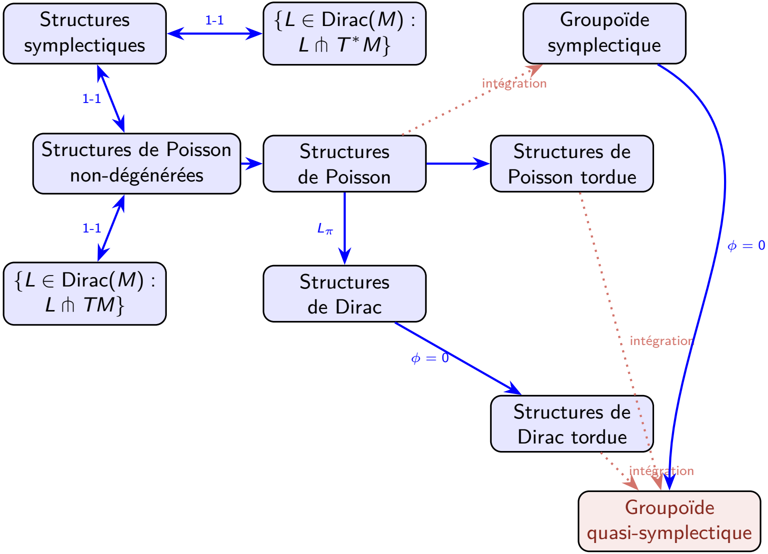
Donnée : (L, ϕ)

Étapes :

1. Intégrer l'algébroïde de Lie $A = \mathrm{pr}_{TM}(L)$ en groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows M$
2. Construire $\omega \in \Omega^2(\mathcal{G})$ multiplicative telle que :
   - $d\omega = s^*\phi - t^*\phi$
   - $L = \mathrm{im}(\rho_{\mathcal{G}}, \sigma_\omega)$

[Henrique Bursztyn et al. Théorème 2.4 *Integration of Twisted Dirac Brackets*]

Relations entre les structures



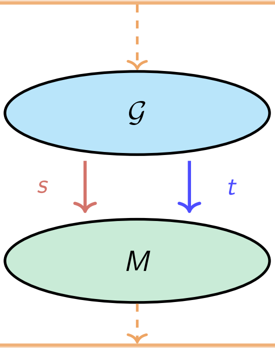
Structure de Poisson sur

$$(\mathcal{G} \quad \rightrightarrows \quad M, L)$$

0-shifted Poisson structure

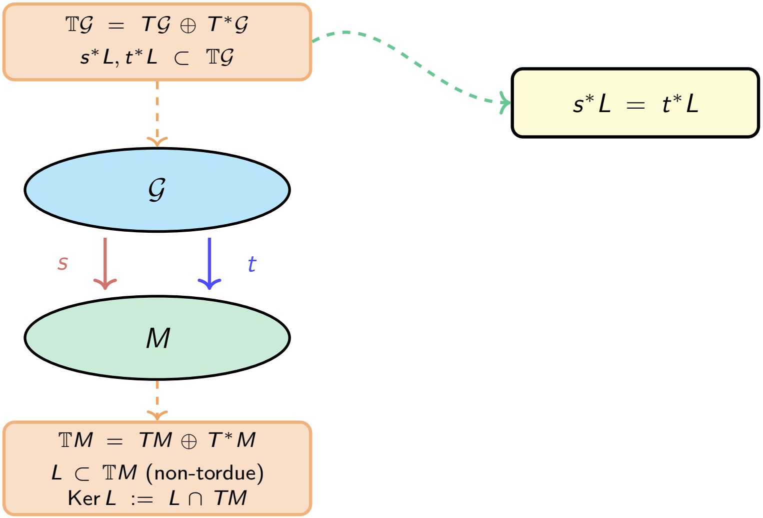
Structure de Poisson sur $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, L)$

$$\mathbb{T}\mathcal{G} \;=\; T\mathcal{G} \oplus T^*\mathcal{G}$$
$$s^*L, t^*L \;\subset\; \mathbb{T}\mathcal{G}$$



$$\mathbb{T}M \;=\; TM \oplus T^*M$$
$L \;\subset\; \mathbb{T}M$ (non-tordue)
$$\operatorname{Ker} L \;:=\; L \cap TM$$

Structure de Poisson sur $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, L)$



Structure de Poisson sur $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, L)$

$$\mathbb{T}\mathcal{G} \; = \; T\mathcal{G} \oplus T^*\mathcal{G}$$
$$s^*L, t^*L \; \subset \; \mathbb{T}\mathcal{G}$$

$$s^*L \; = \; t^*L$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d, shift right=3, "s"'] \arrow[d, shift left=3, "t"] \\ M \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{T}M \; = \; TM \oplus T^*M$$
$$L \; \subset \; \mathbb{T}M \text{ (non-tordue)}$$
$$\operatorname{Ker} L \; := \; L \cap TM$$

$$\mathrm{im}(\rho_{\mathcal{G}}) \; = \; \ker(L)$$

Structure de Poisson sur

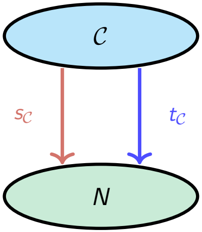
1-coisotrope décalé

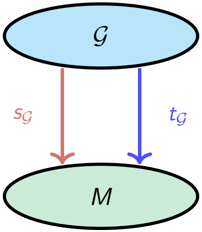
$$c \ : \ (\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \rightarrow (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \Phi)$$

Structure de Poisson sur c : $(\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, shift right, "s_{\mathcal{C}}"'] \arrow[d, shift left, "t_{\mathcal{C}}"] \\ N \end{tikzcd}$$

Structure de Poisson sur c : $(\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

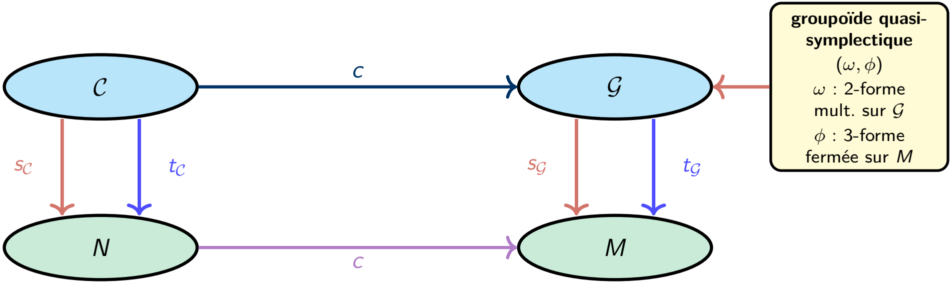




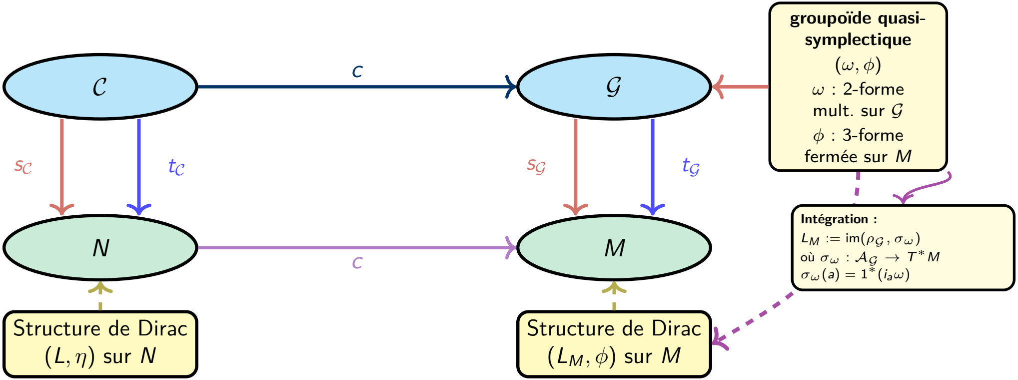
Structure de Poisson sur $c : (\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "c"] \arrow[d, shift right, "s_{\mathcal{C}}"'] \arrow[d, shift left, "t_{\mathcal{C}}"] & & \mathcal{G} \arrow[d, shift right, "s_{\mathcal{G}}"'] \arrow[d, shift left, "t_{\mathcal{G}}"] \\
N \arrow[rr, "c"'] & & M
\end{tikzcd}$$

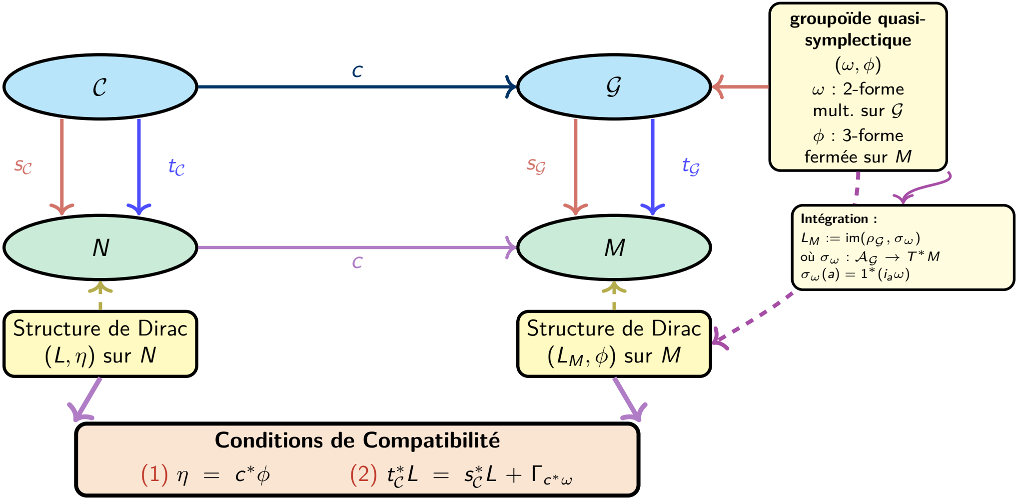
Structure de Poisson sur $c : (\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$



Structure de Poisson sur c : $(\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$



Structure de Poisson sur $c : (\mathcal{C} \rightrightarrows N, L, \eta) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega, \phi)$



Non-dégénérescence : L'application

$$(\rho_{\mathcal{C}},\ c^*\sigma_\omega c_*,\ c_*) : A_{\mathcal{C}} \longrightarrow L \times_c A_{\mathcal{G}}$$

est surjective, où

$$L \times_c A_{\mathcal{G}} := \{((v,\alpha),a) \in L \oplus c^* A_{\mathcal{G}} \mid c_* v = \rho\, a,\ \ \alpha = c^*\sigma_\omega a\}.$$

$$\sigma_\omega \ : \ A_{\mathcal{G}} \ \to \ T^*M, \sigma_\omega\, a \ := \ 1^*(i_a\omega)$$

Coisotrope Classique

vs

Coisotrope 1-Décalée

Classique VS 1-Décalé

Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$ intégrant (M, π)
Sous-variété coisotrope $\mathcal{C} \quad \subset \quad M$

Classique VS 1-Décalé

Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$ intégrant (M, π)
Sous-variété coisotrope $\mathcal{C} \quad \subset \quad M$

Niveau Algébroïde

Niveau Groupoïde

Algébroïde :
$A_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$

Classique VS 1-Décalé

Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$ intégrant (M, π)
Sous-variété coisotrope $\mathcal{C} \subset M$

Niveau Algébroïde

Algébroïde :
$A_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$

$\downarrow$

Sous-algébroïde :
$(T\mathcal{C})^\circ$

Niveau Groupoïde

Groupoïde :
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$

$\downarrow$

Sous-groupoïde :
$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{G}$

Classique VS 1-Décalé

Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$ intégrant (M, π)
Sous-variété coisotrope $\mathcal{C} \subset M$

Niveau Algébroïde

Niveau Groupoïde

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}\textbf{Algébroïde :} \\ A_{\mathcal{G}} \simeq T^*M\end{matrix} \arrow[d] & & \begin{matrix}\textbf{Groupoïde :} \\ \mathcal{G} \rightrightarrows M\end{matrix} \arrow[d] \\
\begin{matrix}\textbf{Sous-algébroïde :} \\ (T\mathcal{C})^{\circ}\end{matrix} \arrow[rr, dashed, "\text{Intégration}"] & & \begin{matrix}\textbf{Sous-groupoïde :} \\ \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{G}\end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Classique VS 1-Décalé

Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$ intégrant (M, π)
Sous-variété coisotrope $\mathcal{C} \quad \subset \quad M$

Niveau Algébroïde

Niveau Groupoïde

Algébroïde :
$A_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$

Groupoïde :
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$

Intégration

Sous-algébroïde :
$(T\mathcal{C})^\circ$

Sous-groupoïde :
$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{G}$

Passage au 1-décalé :
Structure Lagrangienne 1-décalée sur $\mathcal{C} \quad \to \quad \mathcal{G}$

Classique VS 1-Décalé

Groupoïde symplectique $(\mathcal{G} \rightrightarrows M, \omega)$ intégrant (M, π)
Sous-variété coisotrope $\mathcal{C} \quad \subset \quad M$

Niveau Algébroïde

Niveau Groupoïde

Algébroïde :
$A_{\mathcal{G}} \simeq T^*M$

Groupoïde :
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$

Sous-algébroïde :
$(T\mathcal{C})^\circ$

Intégration

Sous-groupoïde :
$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{G}$

Passage au 1-décalé :
Structure Lagrangienne 1-décalée sur $\mathcal{C} \;\; \to \;\; \mathcal{G}$

Condition de non-dégénérescence :
$(T\mathcal{C})^\circ \xrightarrow{\sim} \{(v, \xi) \in T\mathcal{C} \times T^*M : v = \pi(\xi), \xi|_{T\mathcal{C}} = 0\}$

L'Équivalence de Morita entre

1-Coisotropes Décalées

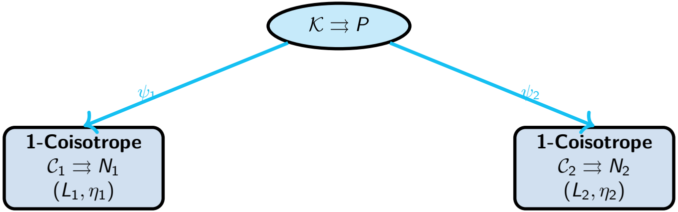
Induit-elle un Isomorphisme

d'Algèbres de Poisson ?

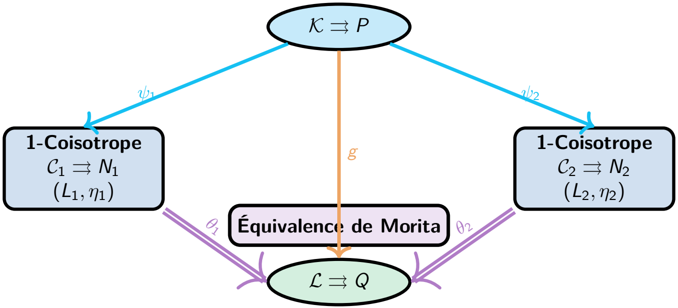
Bibundle coisotrope

$$\mathcal{K} \rightrightarrows P$$

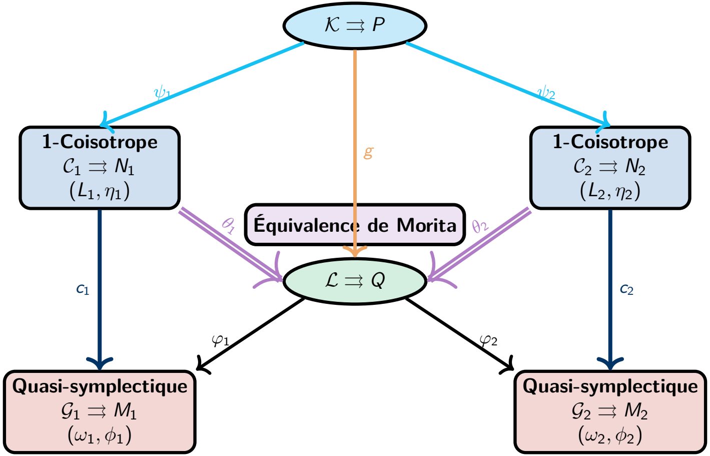
Bibundle coisotrope



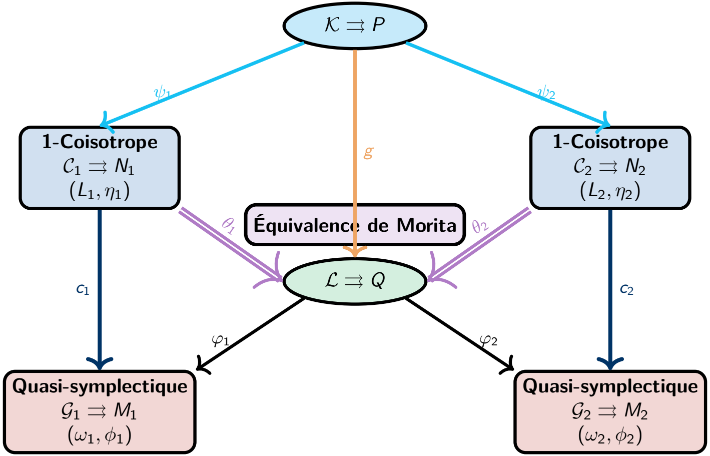
Bibundle coisotrope



Bibundle coisotrope



Bibundle coisotrope



Compatibilité coisotrope :

$$\psi_2^* L_2 \;=\; \psi_1^* L_1 + \Gamma_\delta$$

où $\delta \;=\; -g^*\gamma + \theta_1^*\omega_1 - \theta_2^*\omega_2$

Prochaine étape :

Structure P_∞-Algèbre

sur 1-coisotrope décalé

Définition : P_∞-algèbre

P_∞-ALGÈBRE

Définition : P_∞-algèbre

P_∞-ALGÈBRE

Algèbre graduée commutative

$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ sur k

Définition : P_∞-algèbre

P_∞-ALGÈBRE

Algèbre graduée commutative

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n \text{ sur } k$$

Opérations : $\lambda_n : A^{\otimes n} \to A$

degré : $\deg(\lambda_n) = 2 - n$

P_∞-ALGÈBRE

Algèbre graduée commutative

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n \text{ sur } k$$

Opérations : $\lambda_n : A^{\otimes n} \to A$

degré : $\deg(\lambda_n) = 2 - n$

(I) Antisymétrie

$$\lambda_n(\ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots)$$
$$= -(-1)^{|a_i||a_{i+1}|} \lambda_n(\ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots)$$

Définition : P_∞-algèbre

P_∞-ALGÈBRE

Algèbre graduée commutative

$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ sur k

Opérations : $\lambda_n : A^{\otimes n} \to A$

degré : $\deg(\lambda_n) = 2 - n$

(I) Antisymétrie

$\lambda_n(\ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots)$
$= -(-1)^{|a_i||a_{i+1}|}$
$\lambda_n(\ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots)$

(II) Dérivation

$a \mapsto \lambda_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$
est une dérivation
de degré $2 - n - \sum |a_i|$

Définition : P_∞-algèbre

P_∞-ALGÈBRE

Algèbre graduée commutative
$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ sur k

Opérations : $\lambda_n : A^{\otimes n} \to A$
degré : $\deg(\lambda_n) = 2 - n$

(I) Antisymétrie

$\lambda_n(\ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots)$
$= -(-1)^{|a_i||a_{i+1}|}$
$\lambda_n(\ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots)$

(II) Dérivation

$a \mapsto \lambda_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$
est une dérivation
de degré $2 - n - \sum |a_i|$

(III) Jacobi

$\sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^{q(n-q)}}{q!(n-q)!}$
$\lambda_{n-q+1}(\lambda_q(\ldots), \ldots)$
$= 0$ sur $\mathrm{Im}(\mathrm{Alt}_n)$

Construction de Cattaneo-Felder

$$\cdots \longrightarrow \Gamma(C, \wedge^j NC) \xrightarrow{\delta} \Gamma(C, \wedge^{j+1} NC) \longrightarrow \cdots$$

Différentielle δ :
Degré 0 : $\delta f = \pi^\sharp(d\tilde{f})$ mod TC δ **est déterminé sur le complexe par**

$$\delta(\alpha \wedge \beta) = \delta\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \delta\beta$$

Cohomologie $H_\pi(N^*C) := \bigoplus_k H_\pi^k(N^*C)$ **:**
Propriétés :

- Algèbre graduée commutative
- $H_\pi^0(N^*C) = C^\infty(\underline{C})$

Problème : Comment quantifier $H_\pi(N^*C)$ (ou au moins $H^0_\pi(N^*C) = C^\infty(\underline{C})$) ?

($\underline{C}$ = espace réduit, possiblement singulier)

Trouver un produit star sur $H_\pi(N^*C)[\![\varepsilon]\!]$ déformant le produit commutatif gradué et tel que $\frac{1}{\varepsilon}(a \star b - (-1)^{|a||b|} b \star a)$ soit le crochet de Poisson modulo ε.

Problème : Comment quantifier $H_\pi(N^*C)$ (ou au moins $H^0_\pi(N^*C) = C^\infty(\underline{C})$) ?

($\underline{C}$ = espace réduit, possiblement singulier)

Trouver un produit star sur $H_\pi(N^*C)[\![\varepsilon]\!]$ déformant le produit commutatif gradué et tel que $\frac{1}{\varepsilon}(a \star b - (-1)^{|a||b|} b \star a)$ soit le crochet de Poisson modulo ε.

$\longrightarrow$

Idée clé : Quantifier le P_∞-algèbre $\Gamma(C, \wedge NC)$

(cohomologie de l'algébroïde de Lie)

Problème : Comment quantifier $H_\pi(N^*C)$ (ou au moins $H^0_\pi(N^*C) = C^\infty(\underline{C})$) ?

($\underline{C}$ = espace réduit, possiblement singulier)

Trouver un produit star sur $H_\pi(N^*C)[\![\varepsilon]\!]$ déformant le produit commutatif gradué et tel que $\frac{1}{\varepsilon}(a \star b - (-1)^{|a||b|} b \star a)$ soit le crochet de Poisson modulo ε.

Idée clé : Quantifier le P_∞-algèbre $\Gamma(C, \wedge NC)$

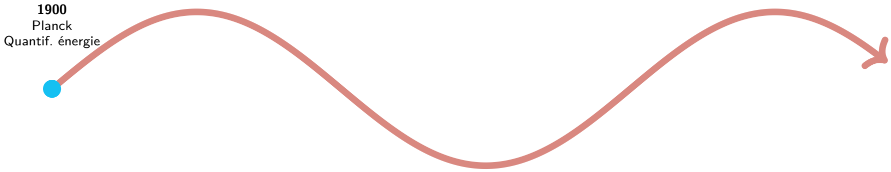
(cohomologie de l'algébroïde de Lie)

Théorème de formalité relative :

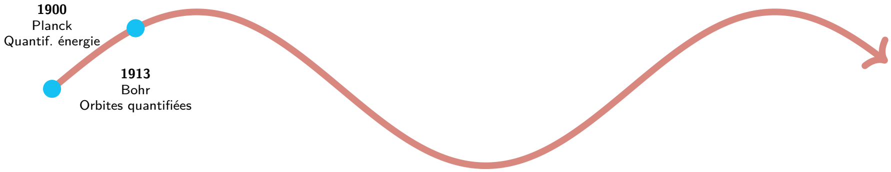
Structure A_∞ sur $\Gamma(C, \wedge NC)[\![\varepsilon]\!]$

(quantification par déformation)

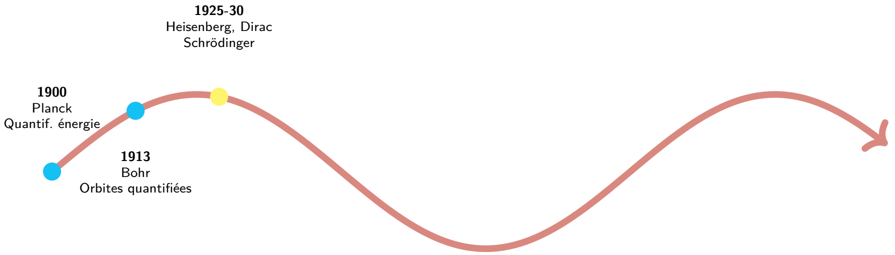
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



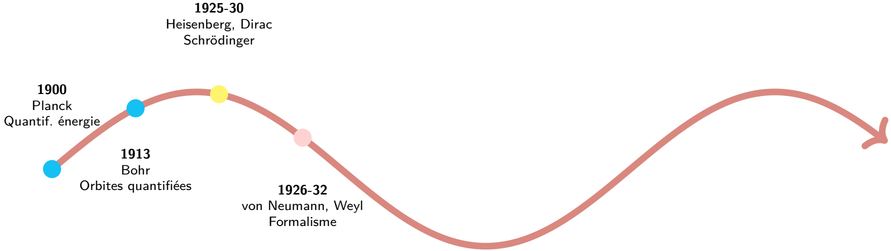
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



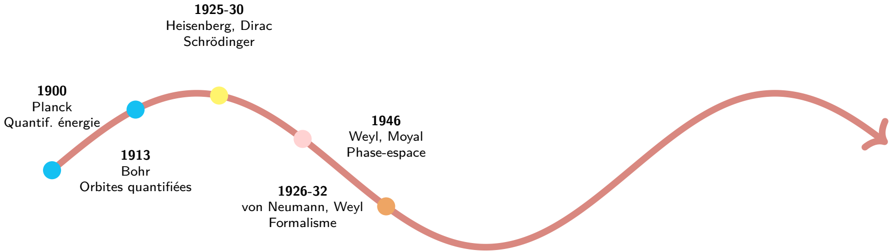
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



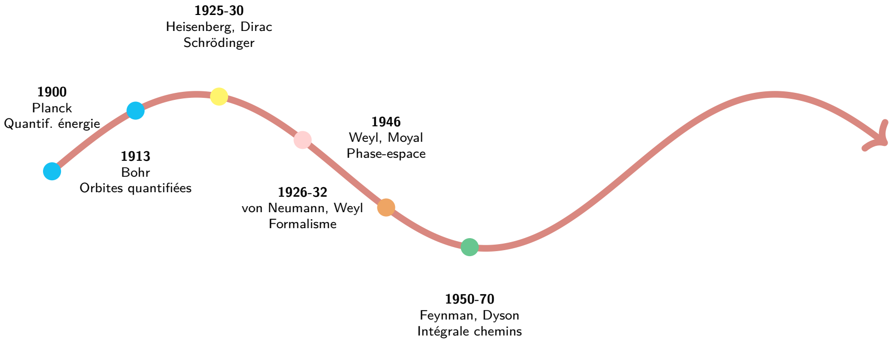
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



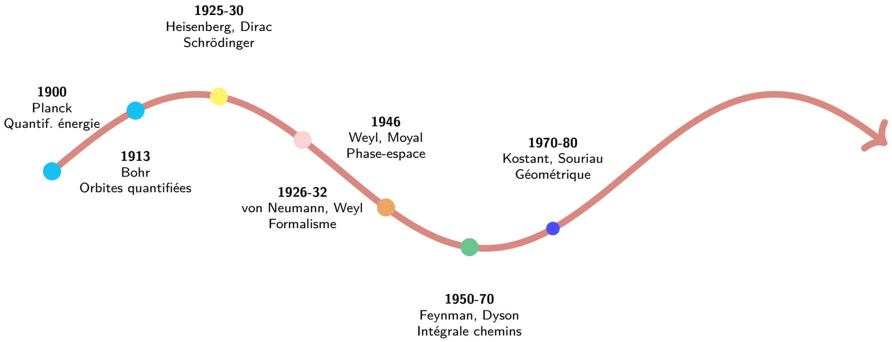
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



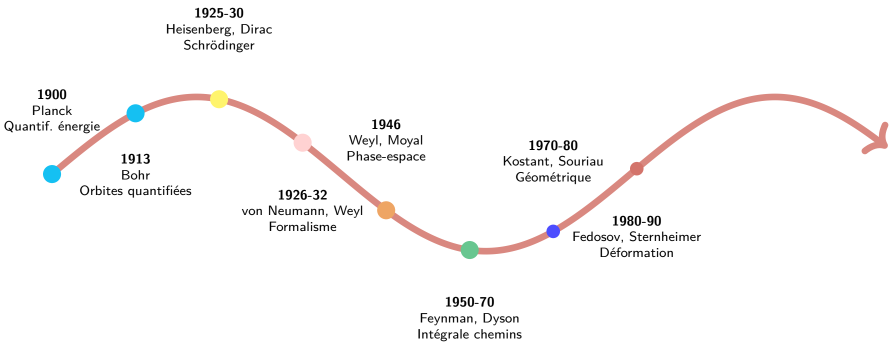
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



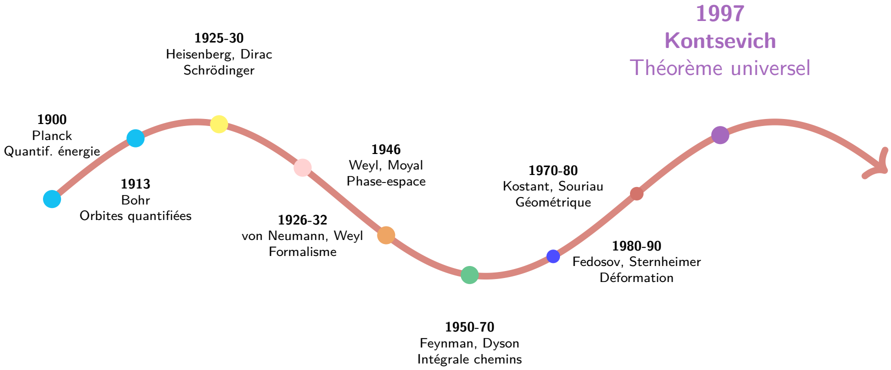
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



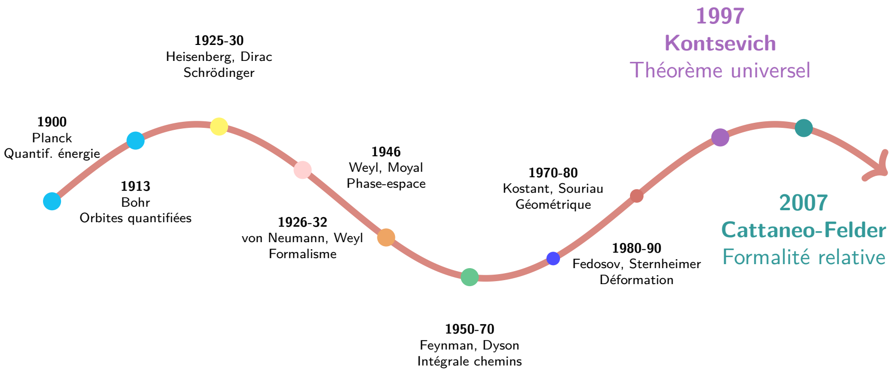
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



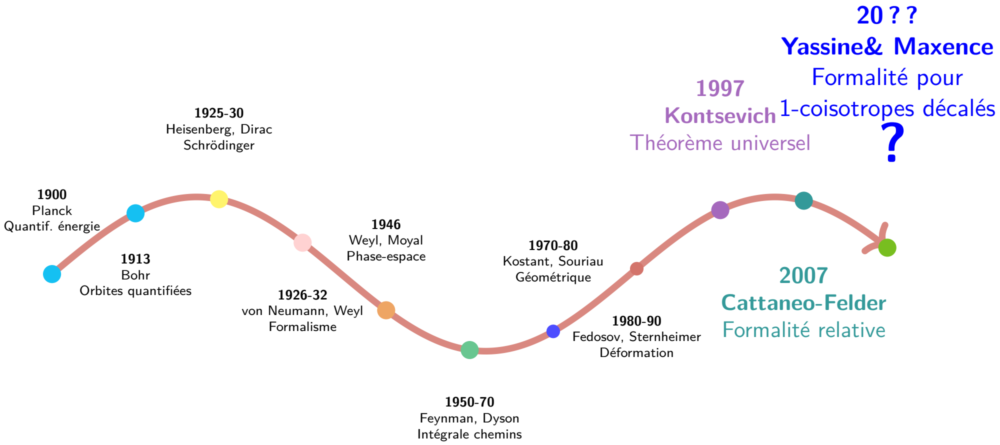
Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



Vers la Quantification des 1-Coisotropes Décalés



Merci pour votre attention